Etude de deux problèmes quasilinéaires elliptiques avec terme de source relatif à la fonction ou à son gradient

Haydar Abdel Hamid

UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS DE TOURS

École Doctorale : **Santé, Sciences, Technologies**
Laboratoire de **Mathématiques et Physique Théorique**

THÈSE présentée par :

Haydar ABDEL HAMID

soutenue le : **7 décembre 2009**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université François - Rabelais**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques Pures**

Etude de deux problèmes quasilinéaires elliptiques avec terme de source relatif à la fonction ou à son gradient

THÈSE DIRIGÉE PAR :

BIDAUT-VERON Marie-Françoise	Professeur à l'Université de Tours

RAPPORTEURS :

PERAL Ireneo	Professeur à l'Université Autonoma de Madrid
SOUPLET Philipe	Professeur à l'Université Paris XIII

JURY :

BARLES Guy	Professeur à l'Université de Tours
BIDAUT-VERON Marie-Françoise	Professeur à l'Université de Tours
MURAT François	Professeur à l'Université Paris VI
PERAL Ireneo	Professeur à l'Université Autonoma de Madrid
PRIGNET Alain	Maître de conférences à l'Université Paris-Est
SOUPLET Philipe	Professeur à l'Université Paris XIII
VERON Laurent	Professeur à l'Université de Tours

Je dédie cette thèse à

Mes très chers parents Khaled et Amal

Ma chère femme Abir

Mes chères sœurs Sahar, Taghrid, Waad et Siran

Mes chers frères Hilal et Firas

Mes neveux Hadi et Jawad

Mes grands parents

Mes oncles et tantes

Mes enseignants tout au long de mes études

Remerciements

Recevez, Madame le Professeur Marie-Françoise Bidaut-Véron, mes plus sincères remerciments pour avoir dirigé cette thèse dans la continuité de mon stage de Master 2. Pour l'attention que vous m'avez portée, votre grande disponibilité, votre patience et votre soutien moral je vous exprime toute ma reconnaissance et mon profond respect. Votre expérience et vos grandes compétences ont permis l'accomplissement de ce travail.

Les professeurs Ireneo Peral et Philipe Souplet ont eu l'extrême gentillesse d'accepter de juger ce travail et d'en être les rapporteurs. Je les remercie vivement pour leurs efforts, leur patience et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je tiens à remercier également Guy Barles, François Murat, Alain Prignet et Laurent Véron d'avoir accepter de faire partie de mon jury.

Un grand merci va à mon professeur de l'université libanaise Moustafa Jazar qui a su me redonner confiance et m'a encouragé pour poursuivre mes études supérieures. Je le remercie pour m'avoir conseillé de venir à Tours. Je remercie également le Professeur Ahmad El Soufi pour son aide et son support paternel tout au long de mes quatres années en France.

Merci à tous les membres du laboratoire de Mathématiques et Physique théorique, qui m'ont permis de travailler dans de très bonnes conditions. Je remercie en particulier les secrétaires Anne-Marie et Bernadette. Je remercie également mes collègues du bureau Ali, Ola, Rami et Thierry.

Je voudrais remercier tous mes amis, mais il m'est impossible de les citer tous ici. J'ai une attention très particulière à Moustafa Elhaj, Mouhammad Hawash et le Docteur Salah Elraii de m'avoir supporté, dans tout les sens du terme, tout au long de cette thèse.

Je voudrais remercier mes parents Khaled et Amal et ma famille entière qui, de loin, a toujours su m'offrir son soutien, sa compréhension, ses encouragements, sa patience et son affection. A eux je dédie cette thèse.

La période la plus difficile de cette thèse a été partagé avec celle qui possède le cœur le plus tendre dans le monde. Alors mille mercis à Abir pour tout le bonheur qu'elle m'apporte, pour sa patience, son soutien... Elle mérite amplement que je lui dédie ce travail.

Etude de deux problèmes quasilinéaires elliptiques avec terme de source relatif à la fonction ou à son gradient

Résumé

Dans ce manuscrit de thèse nous présentons des nouveaux résultats concernant l'existence, la non-existence, la multiplicité et la régularité des solutions positives pour deux problèmes quasilinéaires elliptiques avec conditions de Dirichlet dans un domaine borné. Dans le chapitre 1 d'introduction, nous décrivons les deux problèmes que nous allons étudier et nous donnons les principaux résultats. Le premier, d'inconnue u, comporte un terme de source de gradient à croissance critique. Le second, d'inconnue v, contient un terme source d'ordre 0. Dans le chapitre 2 nous donnons des nouveaux résultats de régularité des solutions renormalisées utiles pour notre étude.

A l'aide d'un changement d'inconnue, nous établissons un lien précis entre les problèmes en u et v. Le chapitre 3 est consacré à montrer ce lien et à donner une première application.

Dans les chapitres 4 et 5 nous traitons de l'existence de solutions, la solution extrémale et sa régularité, l'existence d'une deuxième solution bornée du problème en v. Dans le chapitre 6 nous démontrons un résultat d'existence pour le problème en v avec des données mesures de Radon bornées quelconques. Dans le chapitre 7 nous obtenons des nouveaux résultats pour le problème en u en utilisant la connexion entre ces deux problèmes.

Mots clés : problèmes quasilinéaires elliptiques, p-Laplacien, mesures de Radon bornées, p-capacité, topologie étroite, topologie faible *, solution renormalisée, solution atteignable, solution minimale bornée, solution extrémale, régularité, multiplicité, deuxième solution bornée, fonctionnelle d'Euler, solution semi-stable, géométrie de col, suites de Palais-Smale.

Study of two elliptic quasilinear problems with a source term involving the function or its gradient

Abstract

In the thesis manuscript we present new results concerning existence, nonexistence, multiplicity and regularity of positive solutions for two elliptic quasilinear problems with Dirichlet data in a bounded domain. In chapter 1 we describe the two problems which we study in the sequel and we give the main results. The first one, of unknown u, involves a gradient term with natural growth. The second one, of unknown v, presents a source term of order 0. In chapter 2 we give new regularity results for renormalized solutions.

Thanks to a change of unknown we establish a precise connection between problems in u and v. Chapter 3 is devoted to show this connection and to give a first application.

In the chapters 4 and 5 we treat existence solutions, extremal solution and its regularity, the existence of a second bounded solution for the problem in v. In chapter 6 we prove a result of existence for the problem in v with general bounded Radon measures data. In chapter 7 we obtain new results for the problem in u by using the connection between these two problems.

Keywords : elliptic quasilinear problems, p-Laplacien, bounded Radon measures, p-capacity, narrow topology, weak * topology, renormalized solution, reachable solution, minimal bounded solution, extremal solution, regularity, multiplicity, second bounded solution, Euler function, semi-stable solution, geometry of Mountain Path, Palais-Smale sequences.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction : Présentation du sujet & Organisation de la thèse

Sommaire

L'objectif de ce travail est de présenter des nouveaux résultats concernant l'existence, la non-existence, la multiplicité et la régularité des solutions positives de deux classes d'équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires faisant intervenir l'opérateur $p-$ *Laplacien* sur un domaine borné régulier. Grâce à un changement d'inconnue, nous établissons un lien précis entre ces deux classes de problèmes. Cette connexion sera le point clé dans notre étude.

1 Problèmes étudiés

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ et $1 < p \leq N$. Considérons les deux problèmes elliptiques non linéaires suivants

$$(P_{u,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x) & \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

et

$$(P_{v,\lambda}) \quad \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+g(v))^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

où

- λ est un réel strictement positif.
- β est une fonction définie sur un intervalle quelconque $[0, L)$ satisfaisant

$$\beta \ \in C^0([0,L)),\ L \leq \infty,\ \text{et } \beta \text{ est positive, } \beta \not\equiv 0. \tag{1.3}$$

- g est une fonction définie sur un intervalle quelconque $[0, \Lambda)$ satisfaisant

$$g \in C^1([0,\Lambda)),\ \Lambda \leq \infty,\ g(0) = 0 \text{ et } g \text{ est croissante, } g \not\equiv 0. \tag{1.4}$$

- f est une fonction définie sur Ω satisfaisant

$$f \in L^1(\Omega), \quad f \geq 0 \text{ presque partout dans } \Omega. \tag{1.5}$$

1.1 Changement d'inconnues et équivalence formelle

En partant du problème $(P_{u,\lambda})$ avec β satisfaisant (1.3), considérons le changement d'inconnue $v(x) = \Psi(u(x))$, où Ψ est définie pour tout $t \in [0, L)$ par :

$$\Psi(t) = \int_0^t e^{\gamma(\theta)/(p-1)} d\theta, \qquad \text{où } \gamma(t) = \int_0^t \beta(\theta)d\theta. \tag{1.6}$$

Notant $\Lambda = \Psi(L)$, il est clair que Ψ est une bijection de $[0, L)$ sur $[0, \Lambda)$. Nous définissons sur $[0, \Lambda)$ la fonction suivante :

$$\tau \in [0,\Lambda) \mapsto g(\tau) = e^{\gamma(\Psi^{-1}(\tau))/(p-1)} - 1. \tag{1.7}$$

La fonction g satisfait (1.4). Formellement, nous avons

$$\nabla v = \Psi'(u)\nabla u = e^{\gamma(u)/(p-1)}\nabla u = e^{\gamma(\Psi^{-1}(v))/(p-1)}\nabla u = (1+g(v))\nabla u,$$

et par suite

$$\begin{aligned}
-\Delta_p v &= -\mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = -\mathrm{div}(e^{\gamma(u)}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\\
&= -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)e^{\gamma(u)} - \gamma'(u)e^{\gamma(u)}|\nabla u|^{p}\\
&= (-\Delta_p u - \beta(u)|\nabla u|^p)e^{\gamma(u)} = \lambda f(x)(1+g(v))^{p-1}.
\end{aligned}$$

Donc nous obtenons formellement le problème $(P_{v,\lambda})$. D'autre part, en effectuant le changement de variable $z = \Psi^{-1}(s)$ nous trouvons

$$\int_0^\tau \beta(\Psi^{-1}(s))ds = \int_0^{\Psi^{-1}(\tau)} \beta(z)\Psi'(z)dz = \int_0^{\Psi^{-1}(\tau)} \gamma'(z)e^{\gamma(z)/(p-1)}dz = (p-1)g(\tau).$$

pour tout $\tau \in [0,\tau)$.

D'où

$$g(\tau) = \frac{1}{p-1}\int_0^\tau \beta(\Psi^{-1}(s))ds,$$

donc

$$(p-1)g'(\tau) = \beta(\Psi^{-1}(\tau)) = \beta(t) \qquad \text{avec } t = \Psi^{-1}(\tau).$$

Aussi

$$\int_0^\tau \frac{ds}{1+g(s)} = \int_0^\tau e^{-\gamma(\Psi^{-1}(s))/(p-1)}ds = \int_0^{\Psi^{-1}(\tau)} e^{-\gamma(z))/(p-1)}\Psi'(z)dz = \Psi^{-1}(\tau),$$

donc $\Psi^{-1} = H$ où

$$H(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{1+g(s)} \qquad \forall \tau \in [0,\Lambda)\,. \tag{1.8}$$

Ce qui permet d'effectuer le changement inverse : si g est une fonction qui satisfait (1.4), nous considérons la fonction H définie par (1.8) et on note $L = H(\Lambda)$ puis nous définissons sur $[0,L)$ une fonction β par :

$$t \in [0,L) \mapsto \beta(t) = (p-1)g'(H^{-1}(t)). \tag{1.9}$$

La fonction β satisfait (1.3) et $H^{-1} = \Psi$. Dans le problème $(P_{v,\lambda})$, effectuons le changement d'inconnue $u(x) = H(v(x))$ nous obtenons le problème $(P_{v,\lambda})$.

Donc il y a une bijection T entre la classe des fonctions β satisfaisant (1.3) et la classe des fonctions g satisfaisant (1.4) et une correspondance formelle entre les deux problèmes $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$.

Dans les cas où $L = \infty$, les fonctions γ et Ψ sont bien connues dans l'étude du problème $(P_{u,\lambda})$. Dans le cas $\Lambda = \infty$ la fonction H est connue dans l'étude de $(P_{v,\lambda})$, mais elle est apparemment rarement utilisée pour obtenir le problème $(P_{u,\lambda})$, même dans le cas $p = 2$. Notre **premier but** a été de donner un sens à ce changement d'inconnue. Par exemple, dans le cas $L = \infty$, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est une solution au sens des distributions du problème $(P_{u,\lambda})$ alors $\Lambda = \infty$ et $v = \Psi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et elle est une solution au sens des distributions du problème $(P_{v,\lambda})$, où g est définie par (1.4). À part de cette situation, une solution du problème $(P_{u,\lambda})$ n'est pas nécessairement régulière même pour des fonctions β et f qui sont bornées et par suite $v = \Psi(u)$ risque fortement d'avoir moins de régularité puisque v croît beaucoup plus vite que u. Cela est montré par l'exemple explicite de la sous-section suivante.

1.2 Complexité

L'exemple le plus simple est la fonction constante $\beta = p - 1$:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = (p-1)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x) & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

Posons $v = e^u - 1$. Formellement nous obtenons le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+v)^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.11}$$

et nous pouvons revenir de v vers u par $u = \ln(1 + v)$.

Un exemple, dû à [16], montre que cette correspondance est plus compliquée : considérons $f = 0$ et $\Omega = B(0,1)$, $p < N$, l'équation 1.10 admet la solution $u_0 \equiv 0$, correspondant à $v_0 \equiv 0$; mais elle admet une infinité d'autres solutions. En effet, pour tout $m \in (0,1)$, la fonction

$$u_m(x) = \ln\Big((1-m)^{-1}(|x|^{-(N-p)/(p-1)} - m)\Big), \tag{1.12}$$

appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$, sa singularité logarithmique en 0 n'apparaît pas dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et elle est solution du problème (1.10) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. La fonction $v_m = e^{u_m} - 1$ satisfait

$$\begin{cases} -\Delta_p v_m = K_{m,N}\delta_0 & \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \\ \quad v_m = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où δ_0 est la masse de Dirac concentrée en 0, et $K_{m,N} > 0$, donc $v_m \notin W_0^{1,p}(\Omega)$.

Cela montre que l'apparition de données mesures présente une vraie complexité, mais elle nous a permis à suivre la démarche suivante :

Étape 1. Nous précisons une connexion entre les problèmes $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$, avec la possibilité de l'apparition de données mesures.

Étape 2. Nous étudions les problèmes $(P_{v,\lambda})$ sans ou avec données mesures.

Étape 3. Nous tirons les conséquences sur le problème $(P_{u,\lambda})$.

De plus, nous allons commencer par établir des résultats de non-existence de solutions pour le problème $(P_{u,\lambda})$, puis nous déduisons les conséquenses sur $(P_{v,\lambda})$ avec et sans données mesures. Grâce à cet échange, nous obtenons des nouvelles résultats d'existence ou de non-existence ou de multiplicité ou de régularité, non seulement pour le problème $(P_{u,\lambda})$ mais aussi pour le problème $(P_{v,\lambda})$.

Avant de présenter nos résultats, nous rappelons quelques résultats déjà connus pour les problèmes du type $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$.

1.3 Historique

Problème $(P_{u,\lambda})$. Beaucoup d'auteurs ont traités des problèmes quasi-linéaires dont l'exemple type est le problème $(P_{u,\lambda})$. Parmi eux, nous mentionnons les résultats de [4], [5] pour le cas $p = 2$, [15], [16] pour des opérateurs quasi-linéaires généraux, quand β est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, à valeurs réels non nécessairement positives, mais qui est bornée. Le problème $(P_{u,\lambda})$ a été étudié dans [1] pour $p = 2$ et β plus générale, definie sur $[0, \infty)$, telle que $\liminf\limits_{t\to\infty} \beta(t) > 0$, voir aussi les références dans cet article. Pour $p > 1$ quelconque, le problème a été traité dans [28] dans le cas où β est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et $\beta \in L^1(\mathbb{R})$ avec une donnée mesure quelconque, et dans [27] avec β de signe quelconque, avec des hypothèses fortes sur $|\beta|$.

Problème $(P_{v,\lambda})$. La littérature sur l'étude des équations du type $(P_{v,\lambda})$ dans le cas $\Lambda = \infty$ est très riche, surtout quand g est convexe, sur-linéaire, $p = 2$ et f est bornée. Trois points essentiels peuvent être abordés pour ce type de problème :

(1) Déterminer l'intervalle $[0, \lambda^*)$ de λ pour laquelle il existe au moins une solution variationnelle $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, et l'intervalle $[0, \lambda_b)$ de λ pour laquelle il existe une solution minimale bornée $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Il est évident que $0 \leq \lambda_b \leq \lambda^* \leq \infty$. Naturellement, une question importante se pose : est-ce-que $\lambda^* = \lambda_b$? Quand $\lambda^* < \infty$, que se passe-t-il pour λ grand ?

(2) Les propriétés de régularité de la limite de ces solutions, dite fonction extrémale : est-elle une solution du problème limite, et dans quel sens ? est-elle dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, est-elle bornée ?

(3) L'existence de deux solutions bornées dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ quand g est sous critique par rapport à l'exposant de Sobolev $Q^* = p^* - 1$, où $p^* = \dfrac{p\,N}{N-p}$.

Les premiers modèles types qui ont été étudiés sont le cas de l'exponentielle $g(v) = e^v - 1$ et le cas de la puissance $g(v) = v^q$. Dans ces cas avec $p = 2$, mentionnons les résultats de [11] et [23]. Le cas d'une non-linéarité g plus générale avec $p = 2$ a été étudié par [6], [7] et plus récemment [1]. De nombreux articles traitent de la régularité $L^\infty(\Omega)$ de la solution extrémale, voir [8] et les références dans cet article. Les travaux de [18],

[19], [17], [8], [9] et [10] ont donné des extentions pour le cas général $p > 1$. Concernant l'existence d'une deuxième solution variationnelle bornée, elle a été obtenue pour des non-linéarités de la forme d'une puissance de type concave-convexe, voir [2], [20]. Dans [1], on donne des résultats pour une fonction générale convexe g dans le cas $p = 2$. Ces résultats seront repris et précisés dans la suite. Dans [17], on donne des résultats dans le cas d'une puissance et $p > 1$.

2 Description par chapitre des résultats principaux

Nous regroupons nos résultats en six chapitres :

- Chapitre 2 : *"Solutions renormalisées et solutions atteignables".*
- Chapitre 3 : *"Connexion entre les deux problèmes $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$".*
- Chapitre 4 : *"Existence de solutions pour le problème $(P_{v,\lambda})$".*
- Chapitre 5 : *"Existence d'une deuxième solution et solution extrémale".*
- Chapitre 6 : *"Etude du problème $(P_{v,\lambda})$ avec données mesures quelconques".*
- Chapitre 7 : *"Applications au problème $(P_{u,\lambda})$ sans et avec données mesures".*

2.1 Connexion entre les problèmes $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$

Chapitre 2 : Solutions renormalisées et solutions atteignables.

Dans le chapitre 2, nous rappelons des notions et de quelques propriétées des solutions renormalisées et solutions atteignables du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p U = \mu & \text{dans} \quad \Omega, \\ U = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où μ est une mesure de Radon bornée sur Ω. Nous référons principalement aux deux papiers récents [14] et [13].

Notons que l'unicité des solutions de cette équation reste un problème ouvert lorsque $p \neq 2$, N et la partie singulière de μ est non-nulle, voir les résultats récents de [24] et [22] ; et c'est une grande difficulté que nous rencontrons dans l'étude des problèmes avec données mesures. Pour les solutions renormalisées, il s'ajoute une deuxième difficulté qui est la restriction de la stabilité d'une suite de solutions renormalisées à une approximation particulière pour la mesure μ.

Quand $\mu = F \in L^m(\Omega)$ pour un $m > 1$, nous donnons des nouveaux résultats de régularité dans le lemme 2.3.3 et la proposition 2.3.4, où de plus F dépend de U. Quand $F \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $F \geq 0$, nous établissons dans le lemme 2.3.6 des estimations locales pour le second membre F par rapport à la solution U.

Chapitre 3 : Connexion entre les problèmes $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$.

Dans le chapitre 3, nous définissons une bijection entre la classe des fonction β satisfaisant (1.3) et la classe des fonction g satisfaisant (1.4) et nous donnons quelques propriétés élémentaires de cette bijection. D'après l'expression (1.8), l'intervalle $[0, L)$ de définition de β est de longueur finie si et seulement si $1/(1+g) \in L^1((0,\Lambda))$. Comme conséquence de (1.9), β est **croissante** si et seulement si g est **convexe**. Nous donnons des exemples explicites remarquables. Quelques fonctions β correspondent à des problèmes bien connus en v, parmi lesquelles :

$$-\Delta_p v = \lambda f e^v, \qquad -\Delta_p v = \lambda f(1+v)^Q,\ Q > p-1,$$

où β a une *asymptote*, ou

$$-\Delta_p v = \lambda f(1+v)^Q,\ Q < p-1, \qquad -\Delta_p v = \lambda f(1+v)(1+\ln(1+v))^{p-1},$$

où β est définie sur $[0,\infty)$.

Ensuite, nous montrons un **résultat principal** qui donne le théorème suivant de connexion entre les problèmes $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$. Notons par $\mathcal{M}_b(\Omega)$ l'ensemble des mesures de Radon bornées , $\mathcal{M}_s(\Omega)$ le sous-ensemble des mesures concentrées sur un ensemble de p-capacité nulle, dites singulières; et $\mathcal{M}_b^+(\Omega)$ et $\mathcal{M}_s^+(\Omega)$ sont les sous-ensembles de mesures positives.

Théorème 2.1 *(i) Soit g une fonction satisfaisant (1.4) et H et β les deux fonctions définies par (1.8) et (1.9). Supposons que v est une solution* ***renormalisée*** *du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+g(v))^{p-1} + \mu_s & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

telle que $0 \leq v(x) < \Lambda$ presque partout dans Ω, où $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$. Alors il existe une mesure singulière positive $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$, telle que $u = H(v)$ est une solution ***renormalisée*** *du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x) + \alpha_s & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

De plus si $\mu_s = 0$, alors $\alpha_s = 0$.

Si $\Lambda < \infty$, alors $\mu_s = \alpha_s = 0$ et $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Si $L < \infty = \Lambda$, alors $\alpha_s = 0$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Si $L = \infty = \Lambda$ et g n'est pas bornée, alors $\alpha_s = 0$; si g est bornée, alors $\alpha_s = \dfrac{\mu_s}{(1+g(\infty))^{p-1}}$.

(ii) Soit β une fonction satisfaisant (1.3) et Ψ et g les deux fonctions définies par (1.6) et (1.7). Supposons que u est une solution ***renormalisée*** *du problème (2.2), telle*

que $0 \leq u(x) < L$ *presque partout dans* Ω, *où* $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$. *Alors il existe une mesure* $\mu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$, *telle que* $v = \Psi(u)$ *est une solution **atteignable** du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+g(v))^{p-1} + \mu & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega; \end{cases} \tag{2.3}$$

d'où l'équation est satisfaite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ *et plus précisément, pour tout* $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *telle que* h' *soit à support compact, et tout* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v.\nabla(h(v)\varphi)dx = \lambda \int_\Omega h(v)\varphi f(x)(1+g(v))^{p-1}dx + h(\infty)\int_\Omega \varphi \, d\mu. \tag{2.4}$$

De plus si $L < \infty$, *alors* $\alpha_s = 0$ *et* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Si $\Lambda < \infty$, *alors* $\alpha_s = \mu = 0$ *et* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Si $L = \infty$ *et* $\beta \notin L^1((0,\infty))$, *alors* $\alpha_s = 0$; *si* $\beta \in L^1((0,\infty))$, *alors* $\mu = e^{\gamma(\infty)}\alpha_s$ *est singulière , et* v *est une solution **renormalisée**.*

Si $p = 2$, *ou* $p = N$, *alors en tout cas* μ *est singulière et* v *est une solution **renormalisée**.*

Ce théorème précise et étend largement les résultats de [1, théorèmes 4.2 et 4.3] où $p = 2$ et β est définie sur $[0, \infty)$ et $\liminf_{t \to +\infty} \beta(t) > 0$. Nos démonstrations sont différentes, elles sont basées sur **les équations satisfaites par les troncatures** de u et v. Le fait que $\alpha_s = 0$ quand $\beta \notin L^1((0,\infty))$ améliore quelques résultats de [28].

Première application. Considérons le cas β constant égal à $p-1$ et la fonction correspondante $g(v) = v$ et supposons que f satisfait (1.5) avec $f \not\equiv 0$. Nous donnons des résultats d'existence et d'unicité pour le problème (1.11) en v et nous les traduisons sur le problème (1.10) en u, en utilisant le théorème 2.1. Nous obtenons des résultats de non-existence pour le problème (1.10) en u et nous déduisons des résultats de non-existence pour le problème (1.11) en v, en utilisant (i) du théorème 2.1. L'existence est liée à un problème de valeur propre avec le poids f,

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \lambda f(x) |w|^{p-2} w & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

et plus précisément à sa première valeur propre définie par

$$\lambda_1(f) = \inf_{\substack{w \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ w \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^p \, dx}{\int_\Omega f \, |w|^p \, dx}. \tag{2.5}$$

Nous montrons le résultat d'existence et d'unicité et de régularité suivant :

Théorème 2.2 *Supposons que $g(v) = v$. Si $0 < \lambda < \lambda_1(f)$ alors il existe une solution unique $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (1.11).*
Si $f \in L^{N/p}(\Omega)$, alors $v_0 \in L^k(\Omega)$ pour tout $k > 1$.
Si $f \in L^r(\Omega), r > N/p$, alors $v_0 \in L^\infty(\Omega)$.

En se servant du théorème 2.1, nous obtenons le résultat suivant pour le problème en u :

Corollaire 2.3 *Supposons que $\beta = p - 1$. Si $0 < \lambda < \lambda_1(f)$ alors il existe une* ***unique*** *solution $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (1.10) telle que $e^{u_0} - 1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*
Si $f \in L^{N/p}(\Omega)$, alors $u_0 \in L^k(\Omega)$ pour tout $k > 1$.
Si $f \in L^r(\Omega), r > N/p$, alors $u_0 \in L^\infty(\Omega)$.

Concernant la non-existence, nous établissons pour le problème (1.10) le résultat suivant :

Théorème 2.4 *Supposons que $\beta = p - 1$. Si $\lambda > \lambda_1(f) \geq 0$, ou $\lambda = \lambda_1(f) > 0$ et $f \in L^{N/p}(\Omega), p < N$, alors le problème (1.10), n'admet pas de solution renormalisée.*

En utilisant (i) du théorème 2.1, nons obtenons le résultat suivant pour le problème (1.11) :

Corollaire 2.5 *Supposons que $g(v) = v$. Si $\lambda > \lambda_1(f) \geq 0$, ou $\lambda = \lambda_1(f) > 0$ et $f \in L^{N/p}(\Omega), p < N$, alors le problème (1.11), n'admet pas de solution renormalisée.*

Dans le théorème suivant, nous citons un résultat d'existence ou non-existence pour le problème (1.11) avec donnée mesure dans le second membre. Ce théorème est un cas particulier d'un résultat plus général que nous établirons dans le chapitre 6 où nous étudierons des problèmes plus généraux avec des donnés mesures quelconques.

Théorème 2.6 *Supposons que $f \in L^r(\Omega), r > N/p$. Si $0 < \lambda < \lambda_1(f)$ alors pour toute mesure positive singulière $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$, il existe une solution renormalisée v_s du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p v_s = \lambda f(x)(1 + v_s)^{p-1} + \mu_s & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad v_s = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega; \end{cases} \tag{2.6}$$

Si $\lambda > \lambda_1(f) \geq 0$, ou $\lambda = \lambda_1(f) > 0$ et $f \in L^{N/p}(\Omega), p < N$, alors le problème (2.6), n'admet pas de solution renormalisée.

En appliquant (i) du théorème 2.1, nous trouvons un résultat de forte multiplicité de solutions pour le problème (1.10) :

Corollaire 2.7 *Supposons que $f \in L^r(\Omega), r > N/p$. Si $0 < \lambda < \lambda_1(f)$ alors il existe une* ***infinité*** *de solutions $u_s = \ln(1 + v_s) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (1.10), mois régulières que u_0.*

Extension. Le fait que f ne dépend pas de u ou de v n'est pas utilisé dans la démonstration du théorème de connexion 2.1, nous utiliserons seulement l'hypothèse (1.5) sur f. Nous pouvons donc supposer que f dépend aussi de u ou v. Si u est une solution du problème de la forme

$$-\Delta_p u = \beta(u)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x,u),$$

où $f(x,u) \in L^1(\Omega)$, $f(x,u) \geq 0$, alors v vérifie formellement l'équation

$$-\Delta_p v = \lambda f(x, H(v))(1+g(v))^{p-1}.$$

Réciproquement, si v est une solution du problème de la forme

$$-\Delta_p v = \lambda f(x,v)(1+g(v))^{p-1},$$

alors u est formellement une solution de

$$-\Delta_p u = \beta(u)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x, \Psi(u)).$$

Ce qui étend **largement** le domaine des applications de notre résultat, voir le chapitre 7.

2.2 Etude du problème $(P_{v,\lambda})$ sans mesure

Chapitre 4 : Existence de solutions pour le problème $(P_{v,\lambda})$.

Dans le chapitre 4, nous étudions l'existence ou non des solutions du problème $(P_{v,\lambda})$ pour une fonction g générale, sans donnée mesure. Il est facile de montrer à l'aide de sur et sous solutions que l'ensemble des λ pour laquelle il existe une solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un intervalle $[0,\lambda^*)$ et l'ensemble des λ pour laquelle il existe une solution minimale $\underline{v}_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $\|\underline{v}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$ est un intervalle $[0,\lambda_b)$.

La première interrogation importante est de savoir si $\lambda_b = \lambda^*$. Notre résultat principal de ce chapitre répond positivement à cette question lorsque g est convexe au voisinage de Λ, sous des hypothèses appropriées sur f. Nous étendons le résultat bien connu de [6] relatif au cas $p=2$, et nous améliorons aussi le résultat de [9] pour $p>1$.

Théorème 2.8 *Supposons que g satisfait (1.4) et g est convexe au voisinage de Λ, et $f \in L^r(\Omega), r > N/p$. Alors il existe un réel $\lambda^* > 0$ tel que*

*(i) pour $\lambda \in (0,\lambda^*)$ il existe une solution minimale **bornée** $\underline{v}_\lambda$ de $(P_{v,\lambda})$ telle que $\|\underline{v}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$.*

*(ii) pour $\lambda > \lambda^*$ il n'existe pas de solutions **renormalisée** de $(P_{v,\lambda})$.*
En particulier on a $\lambda_b = \lambda^*$.

Donc pour $\lambda > \lambda^*$, non seulement il n'existe pas de solutions variationnelles, mais encore il n'existe pas de solutions *renormalisées*, ce qui est nouveau pour $p \neq 2$. Il est remarquable que notre démonstration *utilise le problème* $(P_{u,\lambda})$ et *elle est basée sur le théorème d'échange* 2.1. Un résultat plus général est donné dans le théorème 4.3.3.

Chapitre 5 : Existence d'une deuxième solution et solution extrémale.

Dans le chapitre 5, nous étudions deux nouvelles questions importantes quand $\Lambda = \infty$. La première porte sur l'existence d'une deuxième solution variationnelle quand g est sur-linéaire et sous-critique par rapport à l'exposant de Sobolev. Plus précisement, nous supposons que g satisfait

$$M_Q = \limsup_{s \to +\infty} \frac{g(s)^{p-1}}{s^Q} < \infty, \tag{2.7}$$

pour un certain $Q < Q^*$ où

$$Q^* = p^* - 1 = \frac{N(p-1)+p}{N-p} \qquad (Q^* = \infty \text{ si } p = N).$$

Nous définissons sur $\mathbb{R}$ une fonction φ :

$$\varphi(t) = (1 + g(t^+))^{p-1} \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

où $t^+ = \max(0,t)$. Nous considérons une primitive de φ :

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds = \int_0^t (1 + g(s^+))^{p-1} ds \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous montrons qu'il existe au moins deux solutions variationnelles bornées dans les cas du théorème suivant :

Théorème 2.9 *Supposons que g est définie sur* $[0,\infty)$, *et* $\lim_{t \longrightarrow \infty} g(t)/t = \infty$, *et que g satisfait la condition de croissance (2.7) avec $Q < Q^*$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $(Q+1)r' < p^*$. Alors*

(i) Si g est convexe au voisinage de ∞, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda < \lambda_0$, il existe au moins ***deux solutions*** *$v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de $(P_{v,\lambda})$.*

(ii) Si $p = 2$ et g est convexe, ou si $f \in L^\infty(\Omega)$ et g satisfait la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} = k > p,$$

alors ***pour tout*** *$\lambda \in (0, \lambda_b)$ il existe au moins deux solutions $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de $(P_{v,\lambda})$.*

Notre résultat est nouveau même pour $p = 2$, améliore les résultats de [1] où les contraintes sur g sont fortes , et nos preuves sont simplifiées. Dans le cas $p > 1$ et g est de type puissance, il résout la conjecture de [17] que $\lambda_0 = \lambda_b$.

La deuxième question est la régularité de la fonction extrémale définie, quand $\lambda_b < \infty$, par

$$v^* = \lim_{\lambda \nearrow \lambda_b} \underline{v}_\lambda.$$

Est-elle une solution du problème limite (P_{v,λ_b}) , et dans quel sens ? Est-elle variationnelle, est-elle bornée ?
Sous des hypothèses de convexité nous étendons quelques résultats de [25] , [29] et [1] et, en particulier, nous montrons que la solution extrémale est bornée dans le cas où g satisfait (2.7) avec $Q < Q_1$ où

$$Q_1 = \frac{(p-1)N}{N-p} \qquad (Q_1 = \infty \text{ si } p = N).$$

Théorème 2.10 *Supposons que g satisfait (1.4) avec $\Lambda = \infty$ et $\lim_{t \longrightarrow \infty} g(t)/t = \infty$, et g est convexe au voisinage de ∞ ; et $f \in L^r(\Omega), r > N/p$.*
*Alors la fonction extrémale $v^* = \lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} \underline{v}_\lambda$ est une solution **renormalisée** de (P_{v,λ^*}).*
De plus

(i) Si $N < p(1 + p')/(1 + p'/r)$, alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Si $N < pp'/(1 + 1/(p-1)r)$, alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

(ii) Si (2.7)est satisfaite avec $Q < Q_1$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $Qr' < Q_1$, ou si (2.7) est satisfaite avec $Q < Q^*$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $(Q + 1)r' < p^*$, alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

La preuve résulte du théorème 5.4.10, des propositions 5.4.11, 5.4.15 et 5.4.16. Sans hypothèse de convexité sur g, nous obtenons un résultat local, voir le théorème 5.4.6. La preuve est basée sur un résultat de régularité de [3] et l'inégalité de Harnack faible.

2.3 Problème $(P_{v,\lambda})$ avec mesure et retour sur le problème $(P_{u,\lambda})$

Chapitre 6 : Etude du problème $(P_{v,\lambda})$ avec donnée mesure quelquonque

Dans le chapitre 6, nous étudions l'existence de solutions pour le problème $(P_{v,\lambda})$ avec donnée mesure dans le second membre , ce qui nécessite une condition de croissance forte sur g : (2.7) avec $Q < Q_1$. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 2.11 *Supposons que g est définie sur $[0, \infty)$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $r > N/p$. Soit $\mu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$ quelconque.*

(i) Supposons que (2.7) est satisfaite pour $Q = p - 1$ et $M_{p-1}\lambda < \lambda_1(f)$, ou pour un $Q < p - 1$ et $Qr' < Q_1$. Alors le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x)(1 + g(v))^{p-1} + \mu & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution renormalisée.

(ii) Supposons que g satisfait (2.7) pour un $Q \in (p - 1, Q_1)$ et $Qr' < Q_1$. il existe une solution renormalisée pour le problème précédent si λ et $|\mu|(\Omega)$ sont suffisamment petits.

Plus généralement, nous donnons des résultats d'existence de solutions U de signe quelconque pour des problèmes de la forme

$$\begin{cases} -\Delta_p U = \lambda h(x, U) + \mu & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad U = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, et

$$|h(x, U)| \le f(x)(1 + |U|^Q).$$

Dans le théorème 6.1.1, nous améliorons les résultats annoncés dans [21] et nos démonstrations sont plus précises. Dans la proposition 6.1.2, nous donnons un résultat de non-existence basé sur le lemme 6.1.3 dû à Ponce [26].

Chapitre 7 : Applications au problème $(P_{u,\lambda})$

Dans le chapitre 7, nous revenons au problème $(P_{u,\lambda})$ pour un β quelconque satisfaisant (1.3). Dans la première section, nous donnons des résultats d'existence, de régularité, d'unicité ou de multiplicité en utilisant le théorème 2.1 et les résultats des chapitres 4, 5 et 6. Notons que l'exemple de multiplicité de solutions que nous avons cité dans la section 1.2 est un phénomène plus général ; en particulier dans le cas $\lambda f = 0$ le problème $(P_{u,\lambda})$ admet une infinité de solutions si $\beta \notin L^1(0, \infty)$. Si $\lambda f = 0$ et $\beta \in L^1(0, \infty)$ alors la solution triviale est l'unique solution de $(P_{u,\lambda})$.
Dans la deuxième section nous analysons le sens de la condition de croissance (2.7) sur la fonction g en termes de β. Il a été conjecturé que si β satisfaisant (1.3) avec $L = \infty$, et est croissante avec $\lim_{t\to\infty} \beta(t) = \infty$, la fonction correspondante g satisfait la condition de croissance (2.7) pour un $Q > p - 1$ (voir [1] et [12]). Nous montrons que **la conjecture est fausse** , et nous donnons des conditions suffisantes assurant (2.7).

Dans la troisième section, en remarquant que nous pouvons étendre le théorème 2.1 sur des fonctions f qui dépendent de u, nous donnons une application simple sur cette extension, voir le corollaire 7.3.2. Aussi nous donnons dans le corollaire 7.3.4 une application du théorème 2.1 pour des problèmes ayant une autre puissance du terme gradiant.

Finalement, dans la dernière section nous donnons un résultat d'existence pour des problèmes plus généraux, voir le théorème 7.4.1.

3 Liste des publications

Ces résultats ont donné lieu à trois publications :

1. *"Correlation between two quasilinear elliptic problems with a source term involving the function or its gradient"*
Haydar Abdel Hamid, Marie Françoise Bidaut-Véron
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1251-1256.
2. *"On the connection between two quasilinear elliptic problems with source terms of order* 0 *or* 1*"*
Haydar Abdel Hamid, Marie Françoise Bidaut-Véron
Accepté dans Communications in Contemporary Mathematics.
3. *" Existence and multiplicity of solutions of quasilinear equations with convex or non convex reaction term"*
Haydar Abdel Hamid, Marie Françoise Bidaut-Véron
Accepté dans Contemporary Mathematics Fundamental Directions, 1-12.

Bibliographie

[1] Abdellaoui B., Dall'Aglio A., and Peral I., *Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient,* J. Differential Equations, 222(1) :21–62, 2006.

[2] Ambrosetti A., Brezis H., and Cerami G., *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems,* J. Funct. Anal., 122(2) :519–543, 1994.

[3] Bidaut-Véron M.F. and Pohozaev S., *Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems,* J. Anal. Math., 84 :1–49, 2001.

[4] Boccardo L., Murat F., and Puel J.P., *Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 11(2) :213–235, 1984.

[5] Boccardo L., Segura de León S., and Trombetti C., *Bounded and unbounded solutions for a class of quasi-linear elliptic problems with a quadratic gradient term,* J. Math. Pures Appl. (9), 80(9) :919–940, 2001.

[6] Brezis H., Cazenave T., Martel Y., and Ramiandrisoa A., *Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited,* Adv. Differential Equations, 1(1) :73–90, 1996.

[7] Brezis H. and Vázquez J.L., *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems,* Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, 10(2) :443–469, 1997.

[8] Cabré X., *Extremal solutions and instantaneous complete blow-up for elliptic and parabolic problems,* Perspectives in nonlinear partial differential equations, volume 446 of Contemp. Math., pages 159–174. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[9] Cabré X. and Sanchón M., *Semi-stable and extremal solutions of reaction equations involving the p-Laplacian,* Commun. Pure Appl. Anal., 6(1) :43–67, 2007.

[10] Capella A. Cabre X. and Sanchon M., *Regularity of radial minimizers of rection equations involving the p-Laplacian,* preprint.

[11] Crandall M.G. and Rabinowitz P.H., *Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems,* Arch. Rational Mech. Anal., 58(3) :207–218, 1975.

[12] Dall'Aglio A., Giachetti D., and Segura de León S., *Nonlinear parabolic problems with a very general quadratic gradient term,* Differential Integral Equations, 20(4) :361–396, 2007.

[13] Dal Maso G. and Malusa A., *Some properties of reachable solutions of nonlinear elliptic equations with measure data,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 25(1-2) :375–396 (1998), 1997. Dedicated to Ennio De Giorgi.

[14] Dal Maso G., Murat F., Orsina L., and Prignet A., *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 28(4) :741–808, 1999.

[15] Ferone V. and Murat F., *Quasilinear problems having quadratic growth in the gradient : an existence result when the source term is small,* Équations aux dérivées partielles et applications, pages 497–515. Gauthier-Villars, Éd. Sci. Méd. Elsevier, Paris, 1998.

[16] Ferone V. and Murat F., *Nonlinear problems having natural growth in the gradient : an existence result when the source terms are small,* Nonlinear Anal., 42(7, Ser. A : Theory Methods) :1309–1326, 2000.

[17] Ferrero F., *On the solutions of quasilinear elliptic equations with a polynomial-type reaction term,* Adv. Differential Equations, 9(11-12) :1201–1234, 2004.

[18] García Azorero J. and Peral I., *Some results about the existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem,* Indiana Univ. Math. J., 43(3) :941–957, 1994.

[19] García Azorero J., Peral I., and Puel J.P., *Quasilinear problems with exponential growth in the reaction term,* Nonlinear Anal., 22(4) :481–498, 1994.

[20] García Azorero J., Peral I., and Manfredi J.J., *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations* Commun. Contemp. Math., 2(3) :385–404, 2000.

[21] Grenon N., *Existence results for semilinear elliptic equations with small measure data,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 19(1) :1–11, 2002.

[22] Maeda F.Y., *Renormalized solutions of Dirichlet problems for quasilinear elliptic equations with general measure data,* Hiroshima Math. J., 38(1) :51–93, 2008.

[23] Mignot F. and Puel J.P., *Sur une classe de problèmes non linéaires avec non linéairité positive, croissante, convexe,* Comm. Partial Differential Equations, 5(8) :791–836, 1980.

[24] Trudinger N. and Wang X., *Quasilinear elliptic equations with signed measure data,* Discrete Continuous Dyn. Systems, 23 :477–494, 2009.

[25] Nedev G., *Regularity of the extremal solution of semilinear elliptic equations,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 330(11) :997–1002, 2000.

[26] Ponce A., *Communication personnelle.*

[27] Porretta A. and Segura de León S., *Nonlinear elliptic equations having a gradient term with natural growth,* J. Math. Pures Appl. (9), 85(3) :465–492, 2006.

[28] Porretta A., *Nonlinear equations with natural growth terms and measure data,* Proceedings of the 2002 Fez Conference on Partial Differential Equations, volume 9 of Electron. J. Differ. Equ. Conf., pages 183–202 (electronic), San Marcos, TX, 2002. Southwest Texas State Univ.

[29] Sanchón M., *Regularity of the extremal solution of some nonlinear elliptic problems involving the p-Laplacian,* Potential Anal., 27(3) :217–224, 2007.

Chapitre 2

Solutions renormalisées et solutions atteignables

Sommaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous précisons les notions de solutions qui nous seront utiles pour établir nos résultats dans les chapitres suivantes. Nous rappellons de la définition et de quelques propriétés fondamentales d'une solution renormalisée, pour les détails nous référons au papier récent [13]. Les propriétés les plus importantes qui seront des points clés dans nos démonstrations sont les équations satisfaites par les troncatures d'une solution renormalisée (voir la définition 2.2.11) et la stabilité des solutions renormalisées sous une sorte de convergence précise pour les mesures (voir le théorème 2.2.12). Une deuxième notion de solutions plus faible que la précédente qui sera utilisée est la solution atteignable, nous référons à [12].
Dans la section 2.2, nous donnons quelques propriétés de régularité pour les solutions renormalisées.
Dans la section 2.3, nous établissons des résultats de régularité standard quand le second membre est dans $L^m(\Omega)$ avec $m > 1$, voir le lemme 2.3.3 étendant des résultats précédents. Dans la proposition 2.3.4 nous montrons, en utilisant un argument de *bootstrap* pour certains cas, des résultats de régularité sous des hypothèses de croissance sur le second membre avec un poids $f \in L^r(\Omega)$ avec $r > 1$. Finalement, en adaptant l'idée de [7, Proposition 2.1], nous montrons dans le lemme 2.3.6 une estimation locale par rapport à U du second membre de $-\Delta U = F$, lorsque $F \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $F \geq 0$.

2.2 Notions de solutions

2.2.1 Solutions renormalisées

2.2.1.1 Capacités et Mesures de Radon

Tout d'abord, nous citons quelques outils nécessaires pour introduire la notion des solutions renormalisées. Pour plus de détails nous référons à l'article de base [13].

Définition 2.2.1 on désigne par la p-capacité d'un ensemble $B \subseteq \Omega$ par rapport à Ω la quantité $\mathrm{cap}_p(B,\Omega)$ donné par

1. La p-capacité d'un ensemble compact K de Ω est définie par

$$\mathrm{cap}_p(K,\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla\varphi|^p\,dx : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \varphi \geq 1 \,\mathrm{sur}\, K\right\}$$

2. La p-capacité d'un ensemble ouvert O de Ω est définie par

$$\mathrm{cap}_p(O,\Omega) = \sup\left\{\mathrm{cap}_p(K,\Omega),\ K\,\mathrm{compact},\ K \subseteq O\right\}$$

3. La p-capacité d'un ensemble B de Ω est définie par

$$\mathrm{cap}_p(B,\Omega) = \inf\left\{\mathrm{cap}_p(O,\Omega),\ O\,\mathrm{ouvert},\ B \subseteq O\right\}$$

Maintenant, notons par $\mathcal{M}_b(\Omega)$ l'espace des mesures de Radon sur Ω ayant une variation totale bornée. Pour $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, on note par μ^+, μ^- et$|\mu|$ sa partie positive, sa partie negative et sa variation totale respectivement . On note $\mathcal{M}_b^+(\Omega)$ le sous-ensemble de mesures positives.

Une mesure $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ est dite absolument continue par rapport à la p-capacité si $\mu(B) = 0$ pour tout borélien $B \subseteq \Omega$ tel que $\text{cap}_p(B, \Omega) = 0$. Soit $\mathcal{M}_0(\Omega)$ **l'ensemble des mesures absolument continues** de $\mathcal{M}_b(\Omega)$. On note $\mathcal{M}_0^+(\Omega)$ le sous-ensemble de mesures absolument continues positives.
On dit q'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ est singulière par rapport à la p-capacité si il existe un borélien $E \subset \Omega$, avec $\text{cap}_p(E, \Omega) = 0$,tel que $\mu(B) = \mu(B \cap E)$ pour tout borélien $B \subseteq \Omega$. On dit que μ est concentrée sur un ensemble de capacité nulle. **L'ensemble des mesures singulières** est noté par $\mathcal{M}_s(\Omega)$. On note $\mathcal{M}_s^+(\Omega)$ le sous-ensemble de mesures singulières positives.
Soit $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Parmi les propriétés principales des mesures de Radon bornées, les deux suivantes sont bien connues :

1. Il existe une unique couple de mesures (μ_0, μ_s) avec $\mu_0 \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ et $\mu_s \in \mathcal{M}_s(\Omega)$ telle que
$$\mu = \mu_0 + \mu_s,$$
(voir [16, Lemme 2.1]) . De plus, si $\mu \geq 0$ alors $\mu_0 \geq 0$ et $\mu_s \geq 0$.
2. Toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ appartient à $\mathcal{M}_0(\Omega)$ si et seulement si $\mu \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ (voir [9, Théorème 2.1]). Cela veut dire que si $\mu \in \mathcal{M}_0(\Omega)$, il existe $h \in L^1(\Omega)$ et $g \in (L^{p'}(\Omega))^N$, tel que $\mu = h - \text{div}(g)$ au sens des distributions et on a
$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = \int_\Omega h \, \varphi \, dx + \int_\Omega g \cdot \nabla\varphi \, dx,$$
pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Notons que cette décomposition n'est pas unique puisque $L^1(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega) \neq \{0\}$.

Remarque 2.2.2 *En particulier, pour $h = 0$, on obtient une formule d'intégration par parties :*
$$\int_\Omega \text{div}(g)\varphi \, dx = -\int_\Omega g \cdot \nabla\varphi \, dx,$$
pour tout $g \in (L^{p'}(\Omega))^N$ telle que div$(g) \in L^1(\Omega)$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Grâce à [10], cette formule a lieu pour tout $g \in (L^{p'}(\Omega))^N$ et $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaisant div$(g)\varphi \geq G$ presque partout dans Ω, pour une certaine fonction $G \in L^1(\Omega)$.

Mentionnons les deux types suivants de convergence de mesure :

Définition 2.2.3 *1. On dit qu'une suite de mesure $\mu_n \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ converge **étroitement** vers $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ si*
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi \, d\mu_n = \int_\Omega \varphi \, d\mu, \tag{2.2.1}$$

pour toute fonction φ continue et bornée sur Ω. On note $C_b(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur Ω.

2. *On dit qu'une suite de mesure $\mu_n \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ converge* ***faiblement*** * ***(ou vaguement)*** *vers $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ si (2.2.1) est satisfaite pour toute fonction φ continue et à support compact de Ω. On note $C_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues et à support compact de Ω.*

Remarque 2.2.4 *La convergence étroite des mesures implique la convergence faible *, mais la réciproque n'est pas vraie. Si $\mu_n \geq 0$ on a la caractérisation suivante : μ_n converge vers μ pour la topologie étroite des mesures si et seulement si $\mu_n(\Omega)$ converge vers $\mu(\Omega)$ et la suite μ_n converge vers μ faiblement *. En particulier, si $\mu_n \geq 0$, alors μ_n converge vers μ pour la topologie étroite des mesures si et seulement si (2.2.1) est satisfaite pour tout $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

2.2.1.2 Définition d'une solution renormalisée

Pour tout $k > 0$ et $s \in \mathbb{R}$, on designe par $T_k(s)$ la fonction troncature définie par

$$T_k(s) = \max(-k, \min(k, s))$$

Grâce à [4, Lemme 2.1], on obtient un outil important qui va être utilisé pour définir une solution renormalisée : la définition du gradient d'une fonction ayant toutes les troncatures dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Définition 2.2.5 *Soit u une fonction mesurable définie sur Ω et finie presque partout, telle que $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$. Alors il existe (voir [4, Lemme 2.1]) une fonction mesurable $v : \Omega \to \mathbb{R}^N$ telle que*

$$\nabla T_k(u) = v\chi_{\{|u| \leq k\}} \text{ presque partout dans } \Omega, \text{ pour tout } k > 0,$$

cette fonction est unique au sens de l'équivalence presque partout. On définit le gradient ∇u de u par $\nabla u = v$.

Maintenant, nous pouvons rappeler une première définition d'une solution renormalisée :

Définition 2.2.6 *Soit $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Une fonction u est dite solution* ***renormalisée*** *du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) u est mesurable et finie presque partout dans Ω, telle que $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$.

(ii) le gradient ∇u introduit dans la définition 2.2.5, vérifie

$$|\nabla u|^{p-1} \in L^q(\Omega), \text{ pour tout } 1 \leq q < \frac{N}{N-1}; \tag{2.2.3}$$

(iii) Si $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et si il existe $k > 0$, et $w^{+\infty}$ et $w^{-\infty}$ dans $W^{1,r}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, avec $r > N$, telles que

$$\begin{cases} w = w^{+\infty} & \textit{presque partout sur } \{u > k\}, \\ w = w^{-\infty} & \textit{presque partout sur } \{u < -k\}, \end{cases}$$

alors

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla w \, dx = \int_\Omega w \, d\mu_0 + \int_\Omega w^{+\infty} \, d\mu_+^s - \int_\Omega w^{-\infty} \, d\mu_-^s. \tag{2.2.4}$$

Nous donnons les remarques suivantes qui concernent l'existence, l'unicité ou non et le principe du maximum pour les solutions renormalisées :

Remarque 2.2.7 *Si u est une solution renormalisée du problème* (2.2.2) *alors elle est solution au sens des distributions dans Ω, c'est à dire :*

$$-\Delta_p u = \mu \qquad dans \, \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.2.5}$$

De plus, si $p > 2 - \frac{1}{N}$ alors $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < \frac{(p-1)N}{N-1}$.
Réciproquement, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution de de (2.2.5) *alors $\mu \in W^{-1,p}(\Omega) \subset \mathcal{M}_b(\Omega)$, et u est une solution renormalisée du problème* (2.2.2) *qui est unique d'après [9].*

Remarque 2.2.8 *Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ le problème (2.2.2) admet au moins une solution renormalisée, d'après ([13]). En ce qui concerne le problème d'unicité ou non, on distingue les cas suivants :*
1) Si $\mu \in \mathcal{M}_0(\Omega)$, c'est à dire la partie singulière est nulle, alors cette solution est unique, d'après [9].
2) Si $\mu \notin \mathcal{M}_0(\Omega)$, c'est à dire la partie singulière $\mu_s \neq 0$, alors on distingue encore deux cas :
(i) Si $p = 2$ ou $p = N$ alors cette solution est unique, pour les détails nous référons à [15].
(ii) Si $p \neq 2, N$ alors l'unicité de solutions reste un problème ouvert ; voir les résultats récents de [27], [23].
Dans le cas de l'unicité la notion de solution renormalisée coïncide avec la solution au sens des distributions.

Remarque 2.2.9 ***Principe du maximum faible*** *: Soit u une solution renormalisée de (2.2.2). Si $\mu \geq 0$ alors $u \geq 0$. En effet, soit $u^- = min(u, 0)$ et $w = (T_k(u))^- = T_k(u^-)$, pour $k > 0$. La fonction w est une fonction admissible dans (2.2.4) avec $w^{+\infty} = 0$ et*

$w^{-\infty} = -k$. De plus $\mu_s^- = 0$ et $\mu_0 \geq 0$, car $\mu \geq 0$. Donc en considérant w comme fonction test dans (2.2.4) nous obtenons :

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla T_k(u^-) dx = \int_\Omega T_k(u^-) d\mu_0 \leq 0,$$

par suite,

$$\left\|T_k(u^-)\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega \left|\nabla T_k(u^-)\right|^p dx \leq 0$$

donc $T_k(u^-) = 0$, pour tout $k > 0$, et par conséquense $u^- = 0$; autrement dit $u \geq 0$.

Remarque 2.2.10 *Soit u une solution renormalisée de (2.2.2), et $\mu = \mu_0 + \mu_s$ l'unique décomposition telle que $\mu_0 \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ et $\mu_s \in \mathcal{M}_s(\Omega)$.*

(i) Si $u \geq 0$ presque partout dans Ω, alors la partie singulière vérifie

$$\mu_s \geq 0,$$

voir [13, Definition 2.21]. Dans [25], ce phénomène est appelé le "Principe du Maximum inverse" . Plus généralement, si u est minoré par une constante M presque partout dans Ω, alors on a encore $\mu_s \geq 0$. En effet $u - A$ est localement une solution renormalisée, et on déduit d'après [6, Theorem 2.2].

(ii) Si $u \in L^\infty(\Omega)$, alors $u = T_{\|u\|_{L^\infty(\Omega)}}(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, donc $\mu_s = 0$ et $\mu = \mu_0 \in \mathcal{M}_0(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega)$.

2.2.1.3 Equations satisfaites par les tronquées d'une solution renormalisée

Dans [13], les auteurs donnent trois autres définitions d'une solution renormalisée, équivalentes à la définition (2.2.6). Parmi lesquelles nous rappelons une définition qui donne explicitement les équations satisfaites par les tronquées d'une solution renormalisée. Ces équations joueront un rôle capital dans les démonstrations de nos résultats.

Définition 2.2.11 *Soit $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Une fonction u est dite solution renormalisée du problème (2.2.2) si u satisfait les conditions (i) et (ii) de la définition 2.2.6, et si la condition suivante est satisfaite :*

(iv) Pour tout $k > 0$ il existe $\alpha_k, \beta_k \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$, concentrées sur les ensembles $\{u = k\}$ et $\{u = -k\}$ respectivement, telles que $\alpha_k \to \mu_s^+$ et $\beta_k \to \mu_s^-$ étroitement lorsque $k \to \infty$ et telles que pour tout $k > 0$ et $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\{|u|<k\}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_{\{|u|<k\}} \varphi \, d\mu_0 + \int_\Omega \varphi \, d\alpha_k - \int_\Omega \varphi \, d\beta_k, \tag{2.2.6}$$

autrement dit nous obtenons l'équation satisfaite par $T_k(u)$ pour tout $k > 0$:

$$-\Delta_p(T_k(u)) = \mu_{0,k} + \alpha_k - \beta_k \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{2.2.7}$$

où $\mu_{0,k} = \mu_{0\llcorner\{|u|<k\}}$ est la restriction de μ_0 sur l'ensemble $\{|u| < k\}$.

2.2.1.4 Stabilité des solutions renormalisées

Parmi les grandes difficultés qu'on rencontre dans l'étude des solutions renormalisées des problèmes avec donnée mesure sont les hypothèses restrictives pour la stabilité. Le théorème de stabilité suivant est établi dans [13]. Ce résultat sera fréquemment utilisé dans nos démonstrations.

Théorème 2.2.12 ([13]) *Soit* $\mu = \mu_0 + \mu_s^+ - \mu_s^-$, *avec* $\mu_0 = F - \operatorname{div} g \in \mathcal{M}_0(\Omega)$, $\mu_s^+, \mu_s^- \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$. *Soit*

$$\mu_n = F_n - \operatorname{div} g_n + \rho_n - \eta_n, \tag{2.2.8}$$

avec $F_n \in L^1(\Omega), g_n \in (L^{p'}(\Omega))^N, \rho_n, \eta_n \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$.
Supposons que (F_n) *converge vers* F *faiblement dans* $L^1(\Omega)$, (g_n) *converge vers* g *fortement dans* $(L^{p'}(\Omega))^N$ *et* $(\operatorname{div} g_n)$ *est bornée dans* $\mathcal{M}_b(\Omega)$, *et* (ρ_n) *converge vers* μ_s^+ *et* (η_n) *converge vers* μ_s^- *pour la* ***topologie étroite*** *des mesures. Soit* U_n *une solution renormalisée*

$$\begin{cases} -\Delta_p U_n = \mu_n & \text{dans} \quad \Omega, \\ U_n = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors il existe une sous-suite (U_ν) *convergeant presque partout dans* Ω *vers une solution renormalisée* U *du problème (2.2.2).De plus* $(T_k(U_\nu))$ *converge vers* $T_k(U)$ *fortement dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 2.2.13 *Quelques resultats de convergence pour les fonctions* U_n *sont établis dans [13], sans utiliser les hypothèses de convergence de l'approximation (2.2.8) imposées dans le théorème de stabilité précédent. Plus précisément, il suffit de supposer que* μ_n *est borné dans* $\mathcal{M}_b(\Omega)$ *(voir [13, Section 5.1]), pour montrer que* $|U_n|^{p-1}$ *est bornée dans* $L^\tau(\Omega)$ *pour tout* $\tau < \frac{N}{N-p}$ *et* $|\nabla U_n|^{p-1}$*est bornée dans* $L^\tau(\Omega)$ *pour tout* $\tau < \frac{N}{N-1}$ *et qu'il existe une sous-suite, nommé encore* U_n, *et une fonction* U *telles que*

$$U_n \to U \text{ presque partout dans } \Omega,$$

$$\nabla U_n \to \nabla U \text{ presque partout dans } \Omega,$$

et

$$|\nabla U_n|^{p-2} \nabla U_n \to |\nabla U|^{p-2} \nabla U \text{ fortement dans } L^\tau(\Omega),$$

pour tout $\tau < \frac{N}{N-1}$.

Remarque 2.2.14 *De manière analogue, une notion de solutions renormalisées locales est introduite et étudiée dans [6]. Nous l'utiliserons au chapitre 5 (proposition 5.4.6).*

2.2.2 Solutions atteignables

Une deuxième notion de solution faible qui sera utilisée dans l'un de nos résultats principaux est la notion des solutions atteignables. Pour plus de détails nous référons à [12, Theorems 1.1 and 1.2].

Définition 2.2.15 *Soit $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Une fonction U est dite solution* ***atteignable*** *du problème (2.2.2) si elle satisfait l'une des conditions (équivalentes) suivante :*

(i) Il existe $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $U_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, telles que

$$-\Delta_p U_n = \varphi_n \qquad \textit{dans } W^{-1,p'}(\Omega),$$

tel que (φ_n) converge vers μ pour la topologie faible * de $\mathcal{M}_b(\Omega)$, et (U_n) converge vers U presque partout dans Ω.

(ii) U est mesurable et finie presque partout dans Ω , telle que $T_k(U)$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$, et il existe $M > 0$ tel que

$$\int_\Omega |\nabla T_k(U)|^p \, dx \leq M(k+1) \qquad \textit{pour tout } k > 0,$$

et $|\nabla U|^{p-1} \in L^1(\Omega)$, et

$$-\Delta_p U = \mu \quad \textit{in } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.2.9}$$

(iii) U est mesurable et finie presque partout dans Ω, telle que $T_k(U)$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$, et il existe $\mu_0 \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$, telles que

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 - \mu_2,$$

et pour tout $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ telle que h' a un support compact, et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla U|^{p-2} \nabla U \cdot \nabla(h(U)\varphi) dx = \int_\Omega h(U)\varphi \, d\mu_0 + h(\infty) \int_\Omega \varphi \, d\mu_1 - h(-\infty) \int_\Omega \varphi \, d\mu_2. \tag{2.2.10}$$

Remarque 2.2.16 *Toute solution atteignable satisfait*

$$|\nabla U|^{p-1} \in L^\tau(\Omega) \qquad \textit{pour tout } \tau \in [1, N/(N-1)),$$

et (le représentant cap_p-quasi continu) U est fini cap_p-quasi partout dans Ω, d'après [12, Theorem 1.1] et [13, Remark 2.11].

De plus, d'après [12], pour tout $k > 0$, il existe $\alpha_k, \beta_k \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$, concentrées sur les ensembles $\{U = k\}$ et $\{U = -k\}$ respectivement, convergeant faiblement * vers μ_1, μ_2, telles que

$$-\Delta_p(T_k(U)) = \mu_{0,k} = \mu_0 \llcorner_{\{|U|<k\}} + \alpha_k - \beta_k \qquad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Il est évident que toute solution renormalisée est une solution atteignable. Les notions coïncident pour $p = 2$ et $p = N$.

Finalement, donnons la définition suivante :

Définition 2.2.17 *Soit $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, une fonction de Carathéodory et $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Nous dirons que u est une solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = H(x, u, \nabla u) + \mu & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

si $H(x, u, \nabla u) \in L^1(\Omega)$ et elle est solution au sens considéré.

2.2.3 Second membre dans $L^1(\Omega)$ et inégalité de type Picone.

Dans cette sous-section nous donnons quelques propriétés d'une solution renormalisée dans le cas particulier où le second membre est dans $L^1(\Omega)$. Tout d'abord notons que, dans ce cas, la notion de solution renormalisée coïncide avec les notions de solutions atteignables, et la solution d'entropie introduite dans [4], et la notion de solution obtenue comme limite d'approximations SOLA donnée dans [14], voir encore [9]. Cela est due à l'unicité de solutions quand le second membre est dans $L^1(\Omega)$.

Définition 2.2.18 *Nous notons par $\mathcal{W}$ (Ω) l'espace des fonctions U telle que il existe $F \in L^1(\Omega)$ telle que U est une solution renormalisée du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p U = F & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad U = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

Alors U est unique, nous posons

$$U = \mathcal{G}(F). \tag{2.2.12}$$

De manière analogue, nous notons $\mathcal{W}_{loc}(\Omega)$ l'espace des fonctions U telles que il existe $F \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que U est une solution renormalisée locale de $-\Delta_p U = F$ dans Ω.

Remarque 2.2.19 *Le théorème 2.2.12 implique en particulier :*

Si (F_n) converge vers F faiblement dans $L^1(\Omega)$, et $U_n = \mathcal{G}(F_n)$, alors il existe une sous-suite (U_ν) et une fonction mesurable U telle que (U_ν) converge presque partout vers U, et $U = \mathcal{G}(F)$.

Remarque 2.2.20 *Grâce à l'unicité et la stabilité, on peut déduire :*

*1) Le **principe de comparaison** :*

Si U_1 et $U_2 \in \mathcal{W}(\Omega)$ et $F_1 = -\Delta_p U_1 \geq -\Delta_p U_2 = F_2$ presque partout dans Ω, alors $U_1 \geq U_2$ presque partout dans Ω.
En effet, considerons $v_n = \mathcal{G}(T_n(F_1))$ et $w_n = \mathcal{G}(T_n(F_1)) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout entier $n \geq 1$. Par le principe du maximum faible (voir par exemple [24, Lemme A.0.7]), nous obtenons $w_n \leq v_n$. D'après la remarque 2.2.19 il existe deux sous-suites v_ν et w_ν qui convergent respectivement vers $\mathcal{G}(F_1) = U_1$ et $\mathcal{G}(F_2) = U_2$ presque partout dans Ω. Donc

$U_2 \leq U_1$.
*2) Le **principe du maximum** :*

Si $U \in \mathcal{W}(\Omega)$ telle que $F = -\Delta_p U \geq 0$ et $U \not\equiv 0$ alors $U > 0$ presque partout dans Ω. En effet, nous avons $F \not\equiv 0$ puisque $U \not\equiv 0$. Soit $F_1 = min(F, 1) \in L^\infty(\Omega)$ et $U_1 = \mathcal{G}(F_1) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Puisque $F_1 \leq F$, alors $U_1 \leq U$ par le principe de comparaison. D'autre part, nous avons $F_1 \not\equiv 0$, donc $U_1 \not\equiv 0$. De plus, $F_1 = -\Delta_p U_1 \geq 0$; donc par le principe du maximum fort (voir [29]) nous avons $U_1 > 0$ presque partout dans Ω. Par suite $U > 0$ presque partout dans Ω.

Maintenant nous déduisons une forme faible de l'inégalité de type *Picone* :

Lemme 2.2.21 *Soit $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$, et $V \in \mathcal{W}(\Omega)$, telles que $U \geq 0$ et $-\Delta_p V \geq 0$ presque partout dans Ω, et $V \not\equiv 0$. Alors $U^p(-\Delta_p V)/V^{p-1} \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx \geq \int_\Omega U^p V^{1-p}(-\Delta_p V) dx. \tag{2.2.13}$$

Preuve. L'inégalité est connue pour $V \in W_0^{1,p}(\Omega)$, voir par exemple [1]. Soit $F = -\Delta_p V$, et $F_n = \min(F, n) \in L^\infty(\Omega)$, et $V_n = \mathcal{G}(F_n)$ pour $n \geq 1$. Nous avons $V_n > 0$; et

$$\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx \geq \int_\Omega U^p V_n^{1-p}(-\Delta_p V_n) dx.$$

D'autre part, la suite F_n converge fortement vers F dans $L^1(\Omega)$, et (V_n) est croissante. D'après la remarque 2.2.19, (V_n) converge presque partout vers une solution renormalisée w de $-\Delta_p v = -\Delta_p V$; et par unicité, $w = V$. De plus, par le principe de maximum nous avons $V > 0$. Donc, par le lemme de Fatou $U^p V^{1-p}(-\Delta_p V) \in L^1(\Omega)$, et nous déduisons l'inégalité (2.2.13). ■

2.3 Régularité

Dans cette section nous rappelons quelques résultats de régularité de base pour les solutions renormalisées du problème (2.2.2) et nous donnons des résultats de régularité pour le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

où $h : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory, sous des conditions de croissance sur h.

2.3.1 Régularité de base

Nous commençons par résumer quelques résultats de régularité pour une solution renormalisée u de l'équation (2.2.2) qui sont bien connus dans le cas $p < N$, voir [4], [13] et plus délicats dans le cas $p = N$, voir [15] et [20]. Rappelons que, voir par exemple [5], pour $0 < q < \infty$ l'espace de Marcinkiewicz $\mathcal{M}^q(\Omega)$ est défini par

$$\mathcal{M}^q(\Omega) = \left\{ : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \exists C < \infty \text{ tel que } |\{x \in \Omega : |f(x)| > k\}| \leq Ck^{-q} \text{ pour tout } k > 0 \right\}.$$

Dans [13], dans le cas $p < N$, les auteurs donnent des estimations de u et de son gradient ∇u dans les espaces de Marcinkiewicz $\mathcal{M}^{\sigma_1}(\Omega)$ et $\mathcal{M}^{\theta_1}(\Omega)$ respectivement, où $\sigma_1 = \frac{(p-1)N}{N-p}$ et $\theta_1 = \frac{(p-1)N}{N-1}$. Ils donnent également des estimations de u dans $\mathcal{M}^r(\Omega)$ pour tout $r > 1$ et de ∇u dans $\mathcal{M}^s(\Omega)$ pour tout $s < N$, dans le cas $p = N$. Mais dans le cas $p = N$, une régularité maximale est donnée par [15] et [20], en imposant plus de régularité sur le domain Ω : les auteurs supposent que $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ est *géométriquement dense*, c'est à dire

$$K_N(\Omega) = \inf \left\{ r^{-N} |B(x,r) \backslash \Omega| : x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega, r > 0 \right\} > 0.$$

On note

$$BMO(\Omega) = \left\{ f \in L^1(\Omega) : \sup_{B(a,r) \subset \Omega} r^{-N} \int_{B(a,r)} \left| f - \frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} f \, dx \right| dx < \infty \right\}$$

Proposition 2.3.1 *Soit $1 < p \leq N$, et $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Soit u une solution renormalisée du problème (2.2.2). Si $p < N$, alors pour tout $k > 0$,*

$$|\{|u| > k\}| \leq C(N,p) k^{-(p-1)N/(N-p)} (|\mu|(\Omega))^{N/(N-p)},$$
$$|\{|\nabla u| > k\}| \leq C(N,p) k^{-N(p-1)/(N-1)} (|\mu|(\Omega))^{N/(N-1)}.$$

Si $p = N$, alors $u \in BMO(\Omega)$, et

$$|\{|\nabla u| > k\}| \leq C(N, K_N(\Omega)) k^{-N} (|\mu|(\Omega))^{N/(N-1)}.$$

Comme conséquence, on obtient des estimations de u et de son gradient dans des espaces $L^s(\Omega)$ optimaux.

Proposition 2.3.2 *Soit $1 < p \leq N$ et $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$. Soit u une solution renormalisée du problème (2.2.2). Si $p < N$, alors pour tout $\sigma \in (0, \frac{N}{N-p})$ et $\theta \in (0, \frac{N}{N-1})$, il existe $C(N,p,\sigma)$, $K(N,p,\theta) > 0$ qu'on peut calculer explicitement, telles que*

$$\left(\int_\Omega |u|^{(p-1)\sigma} \, dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq C(N,p,\sigma) \, |\Omega|^{\frac{1}{\sigma} - \frac{(N-p)}{N}} \, |\mu|(\Omega) \tag{2.3.2}$$

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)\theta} \, dx \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq K(N,p,\theta) \, |\Omega|^{\frac{1}{\theta} - \frac{(N-1)}{N}} \, |\mu|(\Omega) \tag{2.3.3}$$

Si $p = N$, *alors* $\sigma > 0$ *est arbitraire, et les constantes dépendent de* $K_N(\Omega)$. *Si* $p > 2 - \frac{1}{N}$, *alors* $U \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *pour tout* $q < \frac{(p-1)N}{N-1}$.
De plus, dans tout les cas, pour tout $\beta > 1$ *on a l'estimation suivante*

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^p}{(1+|u|)^{\beta}}\, dx \leq \frac{|\mu|(\Omega)}{\beta - 1} \tag{2.3.4}$$

2.3.2 Résultats de régularité

Dans le lemme suivant nous montrons des résultats de régularité d'une solution renormalisée quelconque $u = \mathcal{G}(F) \in \mathcal{W}(\Omega)$ quand le second membre $F \in L^m(\Omega)$, avec $m > 1$. Nous donnons des estimations de u et son gradient dans des espaces L^k optimales. Nous améliorons les résultats de [8], [17], [2], [11] et nous étendons les estimations du gradient données dans [21], [22] pour des solutions $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Des estimations dans les espaces de Marcinkiewicz (ou de Lorentz) sont données dans [19], [3].

Lemme 2.3.3 *Soit* $1 < p \leq N$. *Soit* $U = \mathcal{G}(F)$ *une solution renormalisée du problème (2.2.11) avec* $F \in L^m(\Omega)$, $1 < m < N$. *Notons*

$$\overline{m} = \frac{Np}{Np - N + p}.$$

(i) Si $m > N/p$, *alors* $U \in L^{\infty}(\Omega)$.
(ii) Si $m = N/p$, *alors* $U \in L^k(\Omega)$ *pour tout* $k \geq 1$.
(iii) Si $m < N/p$, *alors* $U^{p-1} \in L^k(\Omega)$ *pour* $k = Nm/(N - pm)$.

(iv) $|\nabla U|^{(p-1)} \in L^k(\Omega)$ *pour* $k = Nm/(N-m)$. *En particulier si* $\overline{m} \leq m$, *alors* $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

En utilisant ce lemme, nous montrons des résultats de régularité pour les solutions du problème (2.3.1) sous des conditions de croissance sur h. La proposition suivante étend des résultats bien connues dans le cas $p = 2$, $f \equiv 1$ et un résultat de [18] pour p quelconque et le cas linéaire $Q = p - 1$, où la solution U est supposée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 2.3.4 *Soit* $1 < p \leq N$. *Supposons que* U *une solution renormalisée du problème (2.3.1), c'est à dire* $h = h(x, U) \in L^1(\Omega)$ *et* $U = \mathcal{G}(h)$. *Supposons que* h *satisfait l'hypothèse :*

$$|h| \leq f(x)(|U|^Q + 1) \qquad \textit{presque partout dans } \Omega,$$

avec $f \in L^r(\Omega), r > 1$ *et* $Q > 0$.

Supposons d'abord $p < N$; *alors*

(i) Si $Q \geq p-1$ *et* $Qr' < Q_1$ *(d'où* $r > N/p$*), alors* $U \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

(ii) Si $Q > p-1$ *et* $Qr' = Q_1$ *et* $|U|^{p-1} \in L^\sigma(\Omega)$ *pour un certain* $\sigma > N/(N-p)$*, alors* $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $U \in L^k(\Omega)$ *pour tout* $k \geq 1$.

(iii) Si $Q \geq p-1$ *et si* $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$*, et* $(Q+1)r' < p^*$*, alors* $U \in L^\infty(\Omega)$*; si* $(Q+1)r' = p^*$*, alors* $U \in L^k(\Omega)$ *pour tout* $k \geq 1$.

(iv) Si $Q < p-1$ *et* $r > N/p$*, alors* $U \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

(v) Si $Q < p-1$ *et* $r = N/p$*, alors* $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $U \in L^k(\Omega)$ *pour tout* $k \geq 1$.

(vi) Si $Q < p-1$ *et* $r < N/p$ *et* $Qr' < Q_1$*, alors* $U^k \in L^1(\Omega)$ *pour tout* $k < d = Nr(p-1-Q)/(N-pr)$*. Dans ce cas, si* $(Q+1)r' < p^*$ *alors* $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$*; si* $(Q+1)r' \geq p^*$*, alors* $|\nabla U|^t \in L^1(\Omega)$ *pour tout* $t < \theta = Nr(p-1-Q)/(N-(Q+1)r)$.
Supposons maintenant $p = N$*, alors* $U \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$*, et* $|\nabla U|^{N(N-1)m/(N-m)} \in L^1(\Omega)$ *pour tout* $m < min(r, N)$.

Remarque 2.3.5 *Nous donnons un contre exemple pour* (ii) *de la proposition précédente lorsque l'hypothèse* $U \in L^\sigma(\Omega)$ *pour un certain* $\sigma > N/(N-2)$ *n'est pas satisfaite, les deux autres hypothèses* $Q > p-1$ *et* $Q\,r' = Q_1$ *sont satisfaites, et* $U \notin W_0^{1,2}(\Omega)$ *: soit* $p = 2$ *et* $\Omega = B(0,1)$*; il existe une fonction radiale strictement positve* $U \in L^{N/(N-2)}(\Omega)$ *telle que*

$$\begin{cases} -\Delta U = U^{N/(N-2)} & \text{dans} \quad \Omega, \\ U = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3.5}$$

avec $\lim_{x\to 0} |x|^{N-2} |\ln|x||^{(N-2)/2} U(x) = c_N > 0$*, voir [26]. Alors* $U \notin L^\sigma(\Omega)$ *pour tout* $\sigma > N/(N-2)$*. La fonction* U *satisfait l'équation* $-\Delta U = fU^Q$ *avec* $Q = \frac{N}{N-2} > 1 = p-1, f \equiv 1$*, et donc* $U \notin W_0^{1,2}(\Omega)$*, car sinon nous déduisons que* $U \in L^\infty(\Omega)$ *d'après (iii), car* $(Q+1)r' = \frac{2N-2}{N-2} < 2^*$.
La fonction U *satisfait aussi* $-\Delta U = fU^Q$ *avec* $Q = 1$*,* $f = U^{2/(N-2)} \in L^{N/2}(\Omega)$*, et on a* $U \notin W_0^{1,2}(\Omega)$ *mais ce n'est pas un contre exemple pour le cas linéaire* $Q = p-1$ *car elle ne satisfait pas l'hypothèse* $U \in L^\sigma(\Omega)$ *pour un certain* $\sigma > N/(N-2)$.

Dans le lemme suivant nous donnons des estimations locales du second membre F quand $F \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $F \geq 0$. Ce type d'estimations est donné dans [7] pour des fonctions continues et sur-harmoniques dans $\mathbb{R}^N$. Suivant l'idée de [7, Proposition 2.1], nous montrons le lemme suivant, qui complète le principe du maximum strict :

Lemme 2.3.6 *Soit* $U \in \mathcal{W}_{loc}(\Omega)$ *telle que* $-\Delta_p U = F \geq 0$ *presque partout dans* Ω*. Pour tout* $x_0 \in \Omega$ *et tout* $\rho > 0$ *telle que la boule* $B(x_0, 4\rho) \subset \Omega$*, et tout* $\sigma \in (0, N/(N-p))$*, il existe une constante* $C = C(N, p, \sigma)$*, telle que*

$$\int_{B(x_0,\rho)} F dx \leq C\rho^{N(1-1/\sigma)-p} \left(\int_{B(x_0,2\rho)} U^{(p-1)\sigma} dx \right)^{1/\sigma}. \tag{2.3.6}$$

Si $U \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *ou si* $U = \mathcal{G}(F)$ *est une solution globale, alors il existe une constante* $C = C(N,p)$ *telle que*

$$\int_{B(x_0,\rho)} F dx \leq C\rho^{N-p} \inf \mathrm{ess}_{B(x_0,\rho)} U^{p-1}. \tag{2.3.7}$$

2.3.3 Preuves

Notons par $C_{N,p}$ la meilleure constante de l'injection de sobolev de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{p^*}(\Omega)$, avec $p^* = \frac{pN}{N-p}$:

$$\left(\int_\Omega |w|^{p^*} dx\right)^{p/p^*} \leq C_{N,p} \int_\Omega |\nabla w|^p \, dx \quad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.3.8}$$

Rappelons l'inégalité de Young avec $\delta > 0$: soit $1 < s, q < \infty$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour tout $a, b \geq 0$ et $\delta > 0$ on a :

$$ab \leq \delta a^s + C(\delta) b^q, \tag{2.3.9}$$

où $C(\delta) = (\delta s)^{-q/s} q^{-1}$.

Nous donnons les démonstrations des propositions 2.3.1 et 2.3.2 dans le cas $p < N$. Le cas $p = N$ est plus délicat, pour cela nous référons à [15] et [20].

Preuve des proposition 2.3.1 et 2.3.2. Notons par $V = |\mu|(\Omega)$ la variation totale de μ. Pour $k > 0$, considerons $T_k(u)$ comme fonction test dans (2.2.2) on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \, dx \leq kV \tag{2.3.10}$$

Estimation de u : En utilisant l'inégalité de Sobolèv (2.3.8)

$$|\{|u| \geq k\}| \leq k^{-p^*} \int_\Omega |T_k(u)|^{p^*} dx \leq k^{-p^*} \left(C_{N,p} \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \, dx\right)^{p^*/p}$$

et en combinant avec l'inégalité (2.3.10), on obtient

$$|\{|u| \geq k\}| \leq (C_{N,p}V)^{p^*/p} k^{(p^*/p)-p^*} = (C_{N,p}V)^{N/(N-p)} k^{-(p-1)N/(N-p)} \tag{2.3.11}$$

De cette inégalité on déduit que $|u|^{p-1} \in M^{\sigma_1}(\Omega)$, où $\sigma_1 = \frac{N}{N-p}$, avec

$$\sup_{k>0} \left\{k^{\sigma_1} \mathrm{mes}\left\{|u|^{p-1} > k\right\}\right\} \leq (C_{N,p}V)^{\sigma_1}$$

Soit maintenant $0 < \sigma < \sigma_1$, et notons $C_{\sigma,\sigma_1} = (\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma})^{\frac{1}{\sigma}} (\frac{\sigma_1}{\sigma})^{\frac{1}{\sigma_1}} (\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - 1})$. Pour $\sigma \geq 1$ on a l'estimation suivante, d'après les deux estimations du [5, Lemme A.2] :

$$\left(\int_\Omega |u|^{(p-1)\sigma} \, dx\right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq C_{\sigma,\sigma_1} |\Omega|^{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_1}} \left(\sup_{k>0} \left\{k^{\sigma_1} \mathrm{mes}\left\{|u|^{p-1} > k\right\}\right\}\right)^{\frac{1}{\sigma_1}}$$

et en combinant les deux inégalités précédentes on obtient

$$(\int_\Omega |u|^{(p-1)\sigma}\, dx)^{\frac{1}{\sigma}} \leq C_{\sigma,\sigma_1} C_{N,p} \, |\Omega|^{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma_1}} \, V.$$

Pour $0 < \sigma < 1$, d'après l'inégalité de Hölder puis en utilisant [5, Lemme A.2]

$$\begin{aligned}
(\int_\Omega |u|^{(p-1)\sigma}\, dx)^{\frac{1}{\sigma}} &\leq |\Omega|^{\frac{1}{\sigma}-1} \int_\Omega |u|^{p-1}\, dx \\
&\leq C_{1,\sigma_1} \, |\Omega|^{\frac{1}{\sigma}-1} \, |\Omega|^{\frac{\sigma_1-1}{\sigma_1}} \, (\sup_{k>0} \left\{k^{\sigma_1} \text{mes} \left\{|u|^{p-1} > k\right\}\right\})^{\frac{1}{\sigma_1}} \\
&\leq C_{1,\sigma_1} C_{N,p} \, |\Omega|^{\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma_1}} \, V.
\end{aligned}$$

Donc on obtient l'estimation (2.3.2) avec $C(N,p,\sigma) = C_{N,p} \max(C_{\sigma,\sigma_1}, C_{1,\sigma_1})$.

Estimation de ∇u : Grâce à l'estimation (2.3.11), on a l'éstimation suivante pour tout k, $\eta > 0$ (voir [4, Lemme 4.2]) :

$$|\{|\nabla u| \geq \eta\}| \leq \frac{V\, k}{\eta^p} + (C_{N,p} V)^{N/(N-p)} k^{-(p-1)N/(N-p)}.$$

En fixant η et en considérant le second membre de l'inégalité précédente comme fonction de k, cette fonction admet un minimum sur $(0, +\infty)$ pour $k_0 = (\frac{(p-1)N}{N-p})^{\frac{N-p}{p(N-1)}} (C_{N,p})^{\frac{N}{p(N-1)}} \eta^{\frac{N-p}{N-1}} V^{\frac{1}{N-1}}$ et la valeur minimale de cette fonction est $C(N,p)\eta^{\frac{(p-1)N}{N-p}} V^{\frac{N}{N-1}}$ où $C(N,p) > 0$ peut être calculée, et on obtient

$$|\{|\nabla u| \geq \eta\}| \leq C(N,p) \, V^{N/(N-1)} \eta^{-(p-1)N/(N-1)}$$

De cette inégalité on déduit que $|\nabla u|^{p-1} \in M^{\theta_1}(\Omega)$, où $\theta_1 = \frac{N}{N-1}$, avec

$$\sup_{\eta>0} \left\{\eta^{\theta_1} \text{mes} \left\{|\nabla u|^{p-1} > \eta\right\}\right\} \leq C(N,p) \, V^{\theta_1}$$

Donc, comme pour l'estimation de u, pour tout $0 < \theta < \theta_1$ on obtient

$$(\int_\Omega |\nabla u|^{(p-1)\theta}\, dx)^{\frac{1}{\theta}} \leq C(N,p,\theta) \, |\Omega|^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta_1}} \, (\sup_{\eta>0} \left\{\eta^{\theta_1} \text{mes} \left\{|\nabla u|^{p-1} > \eta\right\}\right\})^{\frac{1}{\theta_1}}$$

où $C'(N,p,\theta) = \max(C'_{\theta,\theta_1}, C'_{1,\theta_1})$, avec $C'_{\theta,\theta_1} = (\frac{\theta_1}{\theta_1-\theta})^{\frac{1}{\theta}} (\frac{\theta_1}{\theta})^{\frac{1}{\theta_1}} (\frac{\theta_1}{\theta_1-1})$. D'où on a l'estimation (2.3.3) avec $K(N,p,\theta) = C'(N,p,\theta) \, C(N,p)^{\frac{1}{\theta_1}}$.
Pour l'estimation (2.3.4), soit $\beta > 1$ et considérons la fonction réelle définie par

$$\phi_\beta(s) = \int_0^s \frac{dt}{(1+|t|)^\beta} = \frac{1}{\beta-1}(1 - \frac{1}{(1+|s|)^{\beta-1}}) \text{sign}(s),$$

nous avons $\phi_\beta \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $\phi'_\beta(s) = \frac{1}{(1+|s|)^\beta}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. De plus, puisque $\beta > 1$, on a $|\phi_\beta(s)| \leq \frac{1}{\beta-1}$. Considérons la fonction $w = \phi_\beta(T_k(u))$, c'est une fonction admissible d'après (i) de la définition (2.2.6) avec $w^+ = \phi_\beta(k)$ et $w^- = \phi_\beta(-k)$. Donc, puisque $|\phi_\beta| \leq \gamma = \frac{1}{\beta-1}$, d'après (2.2.4) on obtient

$$\int_{\{|u|\leq k\}} \frac{|\nabla u|^p}{(1+|u|)^\beta}\, dx \leq \gamma\, |\mu_0|\,(\Omega) + \gamma \left|\mu_s^+\right|(\Omega) + \gamma \left|\mu_s^-\right|(\Omega)$$

par suite

$$\int_{\{|u|\leq k\}} \frac{|\nabla u|^p}{(1+|u|)^\beta}\, dx \leq \frac{|\mu|\,(\Omega)}{\beta-1}$$

d'où nous déduisons l'éstimation (2.3.4). ∎

<u>Preuve du lemme 2.3.3</u>. Nous avons $\overline{m} \in (1, N/p)$ pour $p < N$, et $\overline{m} = 1$ pour $p = N$.

• Tout d'abord, supposons que $1 < m < N/p$, donc $p < N$. Soit $\varepsilon > 0$ et $k > 0$. Utilisons la fonction test $\phi_{\beta,\varepsilon}(T_k(U))$, où $\phi_{\beta,\varepsilon}(w) = \displaystyle\int_0^w (\varepsilon + |t|)^{-\beta} dt$, pour un réel donné $\beta < 1$. Nous obtenons

$$\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(U)|^p}{(\varepsilon + |T_k(U)|)^\beta} dx = \int_\Omega F\phi_{\beta,\varepsilon}(T_k(U)) dx \leq \int_\Omega |F|\,|\phi_{\beta,\varepsilon}(T_k(U))|\, dx$$

Mais

$$\begin{aligned} |\phi_{\beta,\varepsilon}(s)| &= \left|(\beta-1)^{-1}(\varepsilon^{1-\beta} - (\varepsilon+|s|)^{1-\beta})\mathrm{sign}(s)\right| \\ &= (1-\beta)^{-1}\left|(\varepsilon^{1-\beta} - (\varepsilon+|s|)^{1-\beta})\right| \leq (1-\beta)^{-1}(1+|s|)^{1-\beta}, \end{aligned}$$

car $\beta < 1$. D'où l'inégalité

$$\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(U)|^p}{(\varepsilon + |T_k(U)|)^\beta} dx \leq (1-\beta)^{-1} \int_\Omega |F|\,(\varepsilon + |T_k(U)|)^{1-\beta} dx \tag{2.3.12}$$

Posons $\eta = (p-1)m^* = (p-1)mN/(N-m)$ et alors

$$\eta^* = \frac{\eta N}{N-\eta} = \frac{(p-1)Nm}{N-pm},$$

et choisissons

$$\beta = 1 - \frac{\eta^*}{m'}, \qquad \alpha = 1 - \frac{\beta}{p}.$$

Nous avons $\beta < 1$ et donc $\alpha > 0$. De plus, en substituant η^* et m' par leurs valeurs, nous trouvons

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - \frac{(m-1)(p-1)N}{N-pm} = \frac{N-pm-(pm-m-p+1)N}{N-pm} \\ &= \frac{Np(1-m(Np-N+p)/Np)}{N-pm} = \frac{Np(1-m/\overline{m})}{N-pm} = \frac{Np(\overline{m}-m)}{\overline{m}(N-pm)}, \end{aligned}$$

Donc, nous pouvons conclure que $\beta, \alpha \in (0,1)$ pour $m < \overline{m}$, et $\beta \leq 0 \leq \alpha - 1$ pour $m \geq \overline{m}$. D'autre part, calculons α en fonction de η^* et p^* :

$$\frac{p\alpha}{\eta^*} = \frac{p-1}{\eta^*} + \frac{1}{m'} = \frac{N-pm}{Nm} + 1 - \frac{1}{m} = 1 - \frac{p}{N} = \frac{p}{p^*},$$

donc $\alpha = \frac{\eta^*}{p^*}$.
La fonction $U_{k,\varepsilon} = ((\varepsilon + |T_k(U)|)^\alpha - \varepsilon^\alpha)\mathrm{sign}(U)$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, avec

$$(\varepsilon + |T_k(U)|)^{1-\beta} = (\varepsilon^\alpha + |U_{k,\varepsilon}|)^{\frac{1-\beta}{\alpha}} = (\varepsilon^\alpha + |U_{k,\varepsilon}|)^{\frac{\eta^*}{\alpha m'}},$$

$$\nabla U_{k,\varepsilon} = \frac{\nabla T_k(U)}{\alpha^{-1}(\varepsilon + |T_k(U)|)^{1-\alpha}} = \frac{\nabla T_k(U)}{\alpha^{-1}(\varepsilon + |T_k(U)|)^{\beta/p}},$$

donc, d'après (2.3.12) puis en utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla U_{k,\varepsilon}|^p\,dx &= \alpha^p \int_\Omega \frac{|\nabla T_k(U)|^p}{(\varepsilon + |T_k(U)|)^\beta} dx \leq C_0 \int_\Omega |F|\,(\varepsilon^\alpha + |U_{k,\varepsilon}|)^{\eta^*/\alpha m'} dx \\ &\leq C_0 \,\|F\|_{L^m(\Omega)} (\int_\Omega (\varepsilon^\alpha + |U_{k,\varepsilon}|)^{\eta^*/\alpha} dx)^{\frac{1}{m'}}, \qquad (2.3.13)\end{aligned}$$

où $C_0 = (1-\beta)^{-1}\alpha^p > 0$. Notons $Y = \displaystyle\int_\Omega (\varepsilon^\alpha + |U_{k,\varepsilon}|)^{\eta^*/\alpha} dx$. Remarquons que $\alpha = \frac{\eta^*}{p^*}$ et utilisons l'inégalité $(a+b)^s \leq 2^{s-1}(a^s + b^s)$, pour tout $a, b \geq 0$ et $s \geq 1$ puis utilisons l'inégalité de Sobolev (2.3.8) puis (2.3.13) nous trouvons

$$\begin{aligned}Y = \int_\Omega (\varepsilon^\alpha + |U_{k,\varepsilon}|)^{p^*} dx &\leq 2^{p^*-1}(\varepsilon^{\alpha p^*}\,|\Omega| + \int_\Omega |U_{k,\varepsilon}|^{p^*}\,dx) \\ &\leq 2^{p^*-1}(\varepsilon^{\alpha p^*}\,|\Omega| + (C_{N,p} \int_\Omega |\nabla\, U_{k,\varepsilon}|^{p^*}\,dx)^{p^*/p}) \\ &\leq C_1(\varepsilon^{\alpha p^*} + \|F\|_{L^m(\Omega)} (\int_\Omega (\varepsilon^\alpha + |U_{k,\varepsilon}|)^{p^*} dx)^{\frac{p^*}{pm'}} \\ &= C_1(\varepsilon^{\alpha p^*} + \|F\|_{L^m(\Omega)}^{p^*/p}\, Y^{p^*/pm'})\end{aligned}$$

où $C_1 = 2^{p^*-1}\max(|\Omega|\,, (C_{N,p}C_0)^{p^*/p})$. Nous avons $p^* < pm'$, car $m < N/p$; donc utilisons l'inégalité de Young (2.3.9) pour $a = Y^{p^*/pm'}$,$b = \|F\|_{L^m(\Omega)}^{p^*/p}$, $s = pm'/p^*$ et $q = s/(s-1) = 1/(1-(1/s)) = 1/(1-(p^*/pm'))$, nous obtenons

$$\begin{aligned}Y &\leq C_1(\varepsilon^{\alpha p^*} + \delta Y + C(\delta)\,\|F\|_{L^m(\Omega)}^{p^* q/p}) \\ &= C_1(\varepsilon^{\eta^*} + \delta Y + C(\delta)\,\|F\|_{L^m(\Omega)}^{1/(p/p^* - 1/m')}).\end{aligned}$$

En choisissant $0 < \delta < C_1^{-1}$, nous trouvons une nouvelle constante $C > 0$ qui ne dépend ni de ε, ni de k ; telle que

$$\int_\Omega (\varepsilon^\alpha + |U_{k,\varepsilon}|)^{p^*} dx \leq C(\varepsilon^{\eta^*} + \|F\|_{L^m(\Omega)}^{1/(p/p^*-1/m')}). \qquad (2.3.14)$$

D' autre part, $|T_k(U)|^{\eta^*} \leq (\varepsilon+|T_k(U)|)^{\eta^*} = (\varepsilon^\alpha+|U_{k,\varepsilon}|)^{p^*}$ et $1/(p/p^*-1/m') = \eta^*/(p-1)$; donc

$$\int_\Omega |T_k(U)|^{\eta^*}\, dx \leq C(\varepsilon^{\eta^*} + \|F\|_{L^m(\Omega)}^{\eta^*/(p-1)}).$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Faisons tendre ε vers 0, nous déduisons l'estimation

$$\int_\Omega |T_k(U)|^{\eta^*}\, dx \leq C\, \|F\|_{L^m(\Omega)}^{\eta^*/(p-1)},$$

et par le lemme de Fatou, nous obtenons l'estimation suivante avec une autre constante C :

$$\left(\int_\Omega |U|^{(p-1)Nm/(N-pm)}\, dx\right)^{(N-pm)/Nm} \leq C\, \|F\|_{L^m(\Omega)}. \tag{2.3.15}$$

D'où (iii).

- Supposons de plus que $m < \overline{m}$. Combinons (2.3.13)et (2.3.14), et utilisons la relation

$$\frac{1}{(pm'/p^*)-1} + 1 = \frac{1}{1-p^*/pm'} = \frac{p\,\eta^*}{p^*(p-1)}$$

nous obtenons avec une nouvelle constante $C > 0$:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(U)|^p}{(\varepsilon+|T_k(U)|)^\beta} dx &\leq C\, \|F\|_{L^m(\Omega)} (\varepsilon^{\eta^*} + \|F\|_{L^m(\Omega)}^{1/(p/p^*-1/m')}) \\ &\leq C\, \|F\|_{L^m(\Omega)} (\varepsilon^{\eta^*/m'} + \|F\|_{L^m(\Omega)}^{1/(p/p^*-1/m')m'}) \\ &= C(\varepsilon^{\eta^*/m'}\, \|F\|_{L^m(\Omega)} + \|F\|_{L^m(\Omega)}^{\frac{1}{(pm'/p^*)-1}+1}) \\ & C(\varepsilon^{\eta^*/m'}\, \|F\|_{L^m(\Omega)} + \|F\|_{L^m(\Omega)}^{p\eta^*/p^*(p-1)}),\end{aligned}$$

et en faisant tendre k vers ∞, par le lemme de Fatou nous déduisons

$$\int_\Omega \frac{|\nabla U|^p}{(\varepsilon+|U|)^\beta} dx \leq C(\|F\|_{L^m(\Omega)}\, \varepsilon^{\eta^*/m'} + \|F\|_{L^m(\Omega)}^{\eta^* p/p^*(p-1)}). \tag{2.3.16}$$

D'autre part, nous avons $\eta < p$, et $1/(p/p^* - 1/m') = \eta^*/(p-1)$, d'où

$$\beta = 1 - \frac{\eta^*}{m'} = p - \frac{\eta^* p}{p^*},$$

donc en substituant η^* et p^* par leurs valeurs nous trouvons

$$\frac{\beta\eta}{p-\eta} = \frac{p\eta(1-\eta^*/p^*)}{p-\eta} = \frac{\eta N}{N-\eta} = \eta^*.$$

Par l'inégalité de Hölder avec l'exposant p/η et son conjugué $p/(p-\eta)$, puis en utilisant (2.3.16) et (2.3.15) nous trouvons une autre constante $C>0$, dépendant de Ω telle que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla U|^\eta \, dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla U|^\eta}{(\varepsilon+|U)|)^{\beta\eta/p}}(\varepsilon+|U)|)^{\beta\eta/p}dx \\ &\le \left(\int_\Omega \frac{|\nabla U|^p}{(\varepsilon+|U)|)^{\beta}}dx\right)^{\eta/p}\left(\int_\Omega (\varepsilon+|U)|)^{\eta^*}dx\right)^{1-\eta/p} \\ &\le C(\|F\|_{L^m(\Omega)}\,\varepsilon^{\eta^*/m'}+\|F\|_{L^m(\Omega)}^{\eta^*p/p^*(p-1)})^{\eta/p}(\varepsilon^{\eta^*}+\|F\|_{L^m(\Omega)}^{\eta^*/(p-1)})^{1-\eta/p}\end{aligned}$$

et passons à la limite lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, nous déduisons

$$\int_\Omega |\nabla U|^\eta \, dx \le C\,\|F\|_{L^m(\Omega)}^{\theta},$$

où

$$\theta = (\frac{\eta^* p}{p^*(p-1)})\frac{\eta}{p}+\frac{\eta^*}{(p-1)}(1-\frac{\eta}{p}) = \frac{\eta^*}{p-1}(\frac{\eta}{p^*}+1-\frac{\eta}{p}),$$

donc nous avons

$$\theta = \frac{\eta^*}{p-1}(\frac{\eta(N-p)}{pN}+1-\frac{\eta}{p}) = \frac{\eta^*}{p-1}\frac{N-\eta}{N} = \frac{\eta}{p-1},$$

donc nous obtenons l'estimation

$$\left(\int_\Omega |\nabla U|^{(p-1)Nm/(N-m)}\,dx\right)^{(N-m)/Nm} \le C\,\|F\|_{L^m(\Omega)} \tag{2.3.17}$$

d'où (iv) pour $m<\overline{m}$.

• Supposons $m \ge \overline{m}$, $p<N$. Dans ce cas, il est facile de vérifier que

$$m' \le p^* \Leftrightarrow m \ge \overline{m},$$

par suite par l'injection de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^{m'}(\Omega)$. Alors $L^m(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$, donc, par unicité, $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et elle est une solution variationnelle. Plus précisement

$$L^m(\Omega) \subset W^{-1,Nm/(N-m)}(\Omega).$$

Si $m=\overline{m}$, alors $Nm/(N-m)=p'$, et nous déduisons (2.3.17). Si $m>\overline{m}$, alors d'après [21], [22], $U \in W^{1,\ell}(\Omega)$ avec $\ell=(p-1)Nm/(N-m)$, et nous obtenons (2.3.17) , et (iii) résulte pour $m \ge \overline{m}$; et (i) et (ii) par l'injection de Sobolev. Une autre démonstration dans le cas $m>N/p$ est donnée dans [24].

• Supposons $m>1$ et $p=N$. Alors $L^m(\Omega) \subset W^{-1,Nm/(N-m)}(\Omega)$, d'ici (2.3.17) est satisfaite si $m<N$, et alors $U \in L^\infty(\Omega)$. ∎

Preuve de la proposition 2.3.4. Si $p = N$, alors $U \in L^\sigma(\Omega)$ pour tout $\sigma \geq 1$ d'après la proposition 2.3.2, alors $f(x)\,|U|^Q \in L^m(\Omega)$ pour tout $m \in (1, r)$, alors $U \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ d'après le lemme 2.3.3, et $|\nabla U|^{N-1} \in L^\tau(\Omega)$ pour $\tau = Nm/(N-m)$.

Dans toute la suite nous supposons que $p < N$.

(i) D'abord nous supposons que $Qr' < Q_1$.
Soit $k \in (0,1)$ telle que

$$\frac{1}{r'} > k + \frac{Q}{Q_1} = k + \frac{Q(N-p)}{N(p-1)}.$$

Alors $f(x)\,|U|^Q \in L^{m_0}(\Omega)$ avec $m_0 = 1/(1-k) > 1$. Prenons k suffisamment petite pour qu'on ait $m_0 < N/p$, donc $h(x) \in L^{m_0}(\Omega)$, alors par le lemme 2.3.3, $|U|^{s_1} \in L^1(\Omega)$ avec $s_1 = (p-1)Nm_0/(N-pm_0)$. Alors $f(x)\,|U|^Q \in L^{m_1}(\Omega)$, où

$$\frac{1}{m_1} - \frac{1}{r} = \frac{Q}{p-1}\left(\frac{1}{m_0} - \frac{p}{N}\right). \tag{2.3.18}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_0} &= 1 - \frac{1}{r'} + \frac{Q}{p-1}\left(\frac{1}{m_0} - \frac{p}{N}\right) - \frac{1}{m_0} \\ &< 1 - k - \frac{Q(N-p)}{N(p-1)} + \frac{Q}{p-1}\left(\frac{1}{m_0} - \frac{p}{N}\right) - \frac{1}{m_0} \\ &= \frac{Q}{p-1}(\frac{1}{m_0} - 1) < 0,\end{aligned}$$

d'ici $m_1 > m_0$.

Si $m_1 > N/p$ alors nous déduisons directement (i) par le lemme 2.3.3.

Si $m_1 = N/p$ alors $U \in L^\gamma(\Omega)$ pour tout $\gamma \geq 1$, d'après le lemme 2.3.3, et dans ce cas nous pouvons choisir γ assez large pour obtenir $f(x)\,|U|^Q \in L^\nu(\Omega)$, pour un certain $\nu > N/p$ car $Qr' < Q_1$ et nous déduisons (i).

Si $m_1 < N/p$ alors nous définissons m_2 en fonction de m_1 de la même façon que nous avons défini m_1 en fonction de m_0 et ainsi de suite nous continuons avec la même discussion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ telle que $f(x)\,|U|^q \in L^{m_n}(\Omega)$ et $m_n < N/p$, nous pouvons définir m_{n+1} par

$$\frac{1}{m_{n+1}} - \frac{1}{r} = \frac{Q}{p-1}\left(\frac{1}{m_n} - \frac{p}{N}\right), \tag{2.3.19}$$

et nous montrons que $m_n < m_{n+1}$. Si $m_n < N/p$ pour tout n, alors, la suite $(m_n)_n$ admet une limite car elle est une suite strictement croissante et majorée. Et alors

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{r} = \frac{Q}{p-1}\left(\frac{1}{m} - \frac{p}{N}\right). \tag{2.3.20}$$

Si $Q = p-1$ alors $r = \frac{N}{p}$, ce qui est impossible car $(p-1)r' < Q_1$ si et seulement si $r > \frac{N}{p}$. Quand $Q > p-1$, nous obtenons $m = (Q/(p-1)-1)/\,(Qp'/N - 1/r)$. De plus, il est facile de vérifier que $Qr' < Q_1$ si et seulement si $\frac{Q}{p-1} - 1 < \frac{Qp'}{N} - \frac{1}{r}$. Donc, puisque

$$\frac{Qp'}{N} - \frac{1}{r} = \frac{Qp}{N(p-1)} - \frac{1}{r} > \frac{p}{N} - \frac{1}{r} > 0$$

car $Qr' < Q_1$, nous obtenons $m < 1$, ce qui est impossible.
Alors après un nombre fini d'étapes $\bar{n}$, nous arrivons à $m_{\bar{n}} > N/p$, donc nous obtenons (i) par le lemme 2.3.3.

(ii) Supposons que $Q > p-1$ et $Qr' = Q_1$, donc $p < N$, et $|U|^{p-1} \in L^\sigma(\Omega)$ pour un certain $\sigma > N/(N-p)$. Posons

$$\sigma = (1+\theta)N/(N-p) \quad \text{avec } \theta > 0, \quad \text{et} \quad m_0 = (1+\theta r)/(1+\theta) > 1.$$

Nous avons $Qr/(r-m_0) = (p-1)\sigma$, et par l'inégalité de Hölder pour l'exposant r/m_0 nous obtenons :

$$\int_\Omega (f\,|U|^Q)^{m_0} dx \leq \left(\int_\Omega f^r dx\right)^{m_0/r} \left(\int_\Omega |U|^{Qr/(r-m_0)}\, dx\right)^{1-m_0/r},$$

donc nous avons $f(x)\,|U|^Q \in L^{m_0}(\Omega)$.

Si $m_0 \geq N/p$ alors $U \in L^\infty(\Omega)$ si l'inégalité est stricte et $U \in L^k(\Omega)$ pour tout $k \geq 1$.

Si $m_0 < N/p$ alors nous définissons m_1 par la relation (2.3.18), et donc $f(x)\,|U|^Q \in L^{m_1}(\Omega)$ et $m_0 < m_1$. Et ainsi de suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ telle que $f(x)\,|U|^q \in L^{m_n}(\Omega)$ et $m_n < N/p$, nous pouvons définir m_{n+1} par la relation (2.3.19) et la suite est strictement croissante. Si $m_n < N/p$ pour tout n alors elle a une limite m donné par la relation (2.3.20). Mais en utilisant l'hypothèse $Qr' = Q_1$, avec un calcul simple nous trouvons $m = 1$, ce qui est impossible. D'où (ii).

(iii) Nous montrons (iii) en utilisant [18, Propositions 1.2 and 1.3]. En effet l'équation peut s'écrire sous la forme

$$-\Delta_p U = K(x)(1 + |U|^{p-1}),$$

où

$$|K(x)| \leq f(x)\frac{(1+|U|^Q)}{(1+|U|^{p-1})} \leq f(x)(1+|U|^{Q-p+1}).$$

Si $(Q+1)r' \leq p^*$ alors $K(x) \in L^s(\Omega)$ pour un certain $s \geq N/p$, alors $U \in L^\infty(\Omega)$ si l'inégalité est stricte , et $U \in L^k(\Omega)$ pour tout $k \geq 1$ dans le cas d'égalité.

Maintenant nous traitons le cas strictement sous-linéaire $Q < p-1$. Alors

$$|h(x)| \leq f(x)(|U|^q + 1) = f(|U|^q\,\chi_{\{|U|\geq 1\}} + |U|^q\,\chi_{\{|U|<1\}} + 1) \leq f(|U|^{p-1} + 2),$$

d'ici nous pouvons conclure (iv) comme dans (iii). Si $r = N/p$, alors nous avons $Qr' < Q_1$, et moyennant la même procédure itérative déjà utilisée, nous pouvons construire une suite strictement croissante m_n qui tend vers m donné par la relation (2.3.20). Donc $(\frac{Q}{p-1} - 1)(\frac{1}{m} - \frac{p}{N}) = 0$, par suite $m = N/p$. Alors $h(x) \in L^s(\Omega)$ pour tout $s < N/p$, d'où $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et nous déduisons (v) par le lemme 2.3.3. Si $r < N/p$ alors $m < N/p$. Donc par le lemme 2.3.3, $U^k \in L^1(\Omega)$ pour $k < (p-1)Nm/(N-pm) = \theta$. Si $(Q+1)r' < Q_1$, alors $m > \overline{m}$, donc $U \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Si $(Q+1)r' \geq Q_1$, alors $m \leq \overline{m}$, donc $|\nabla U|^{p-1} \in L^\tau(\Omega)$ pour tout $\tau < Nm/(N-m) = \theta$. Alors nous avons (vi). ■

Preuve du lemme 2.3.6. Dans [7, Proposition 2.1], les auteurs ont donné les estimations (2.3.6) et (2.3.7) pour des fonction continue et sur-harmonique dans $\mathbb{R}^N$. En fait nous pouvons adapter ces estimations pour toute solution renomalisée locale $U \in \mathcal{W}_{loc}(\Omega)$ avec $-\Delta_p U = F \geq 0$.
Tout d'abord notons qu'une telle solution satisfait $U^{p-1} \in L^\sigma_{loc}(\Omega)$ pour tout $\sigma \in \left(0, \frac{N}{N-p}\right)$. Soit $x_0 \in \Omega$ and $\rho > 0$ telle que $B(x_0, 4\rho) \subset \Omega$. Soit $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $[0,1]$, telle que $\zeta(t) = 1$ pour $|t| \leq 1, 0$ pour $|t| \geq 2$. Definissons sur Ω une fonction ξ_ρ par

$$\xi_\rho(x) = \begin{cases} \zeta(|x-x_0|/\rho) & \text{si } x \in B(x_0,4\rho), \\ 0 & \text{si } x \in \Omega\setminus B(x_0,4\rho), . \end{cases}$$

Nous avons $\xi_\rho \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\xi_\rho(x) = 1$ pour $|x - x_0| \leq \rho, 0$ ailleurs. De plus $|\nabla\xi_\rho(x)| \leq \rho^{-1}|\nabla\zeta(|x-x_0|/\rho)|$ pour $\rho \leq x \leq 2\rho$ et $\nabla\xi_\rho = 0$ ailleurs, donc $|\nabla\xi_\rho| \leq C\rho^{-1}$ sur Ω, pour une borne supérieure $C > 0$ de $|\nabla\zeta|$ sur Ω. Considérons $\varphi_\rho = \xi_\rho^\lambda$ avec $\lambda > 0$ suffisament large qui sera fixé ultérieurement. Soit $\sigma \in (1, N/(N-p))$ et $\alpha \in (1-p, 0)$. Nous posons $U_\varepsilon = U + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $k > \varepsilon$. Alors nous pouvons prendre

$$\phi = T_k(U_\varepsilon)^\alpha \xi_\rho^\lambda$$

comme fonction test. D'où

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega F T_k(U_\varepsilon)^\alpha \xi_\rho^\lambda dx + |\alpha| \int_\Omega T_k(U_\varepsilon)^{\alpha-1}\xi_\rho^\lambda |\nabla(T_k(U)|^p dx \\
&\leq \lambda \int_\Omega T_k(U_\varepsilon)^\alpha \xi_\rho^{\lambda-1} |\nabla(T_k(U)|^{p-2} \nabla(T_k(U)\nabla\xi_\rho dx \\
&\leq \lambda \int_\Omega T_k(U_\varepsilon)^\alpha \xi_\rho^{\lambda-1} |\nabla(T_k(U)|^{p-1} |\nabla\xi_\rho| dx \\
&= \lambda \int_{\{\xi_\rho \neq 0\}} T_k(U_\varepsilon)^{\alpha-1}\xi_\rho^\lambda (|\nabla(T_k(U)|^{p-1} T_k(U_\varepsilon)\xi_\rho^{-1}|\nabla\xi_\rho|)dx
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{|\alpha|}{2}\int_\Omega T_k(U_\varepsilon)^{\alpha-1}\xi_\rho^\lambda |\nabla(T_k(U)|^p dx + C(\alpha,\lambda)\int_\Omega T_k(U_\varepsilon)^{\alpha+p-1}\xi_\rho^{\lambda-p}|\nabla\xi_\rho|^p dx,$$

en utilisant l'inégalité (2.3.9) avec $\delta = |\alpha|/2\lambda$, $a = |\nabla(T_k(U)|^{p-1}$,$b = T_k(U_\varepsilon)\xi_\rho^{-1}|\nabla\xi_\rho|$ et

$q = p$. Par suite

$$\int_\Omega FT_k(U_\varepsilon)^\alpha \xi_\rho^\lambda dx + \frac{|\alpha|}{2}\int_\Omega T_k(U_\varepsilon)^{\alpha-1}\xi_\rho^\lambda \left|\nabla(T_k(U)\right|^p dx$$
$$\leq C(\alpha)\int_\Omega T_k(U_\varepsilon)^{\alpha+p-1}\xi_\rho^{\lambda-p}\left|\nabla\xi_\rho\right|^p dx.$$

Alors faisons tendre ε vers 0 et k vers ∞. Posons $\theta = (p-1)\sigma/(p-1+\alpha) > 1$, prenons λ suffisamment large puis utilisons l'inégalité de Hölder puis en utilisant les propriétés de ξ_ρ, nous obtenons

$$\int_\Omega FU^\alpha \xi_\rho^\lambda dx + \frac{|\alpha|}{2}\int_\Omega U^{\alpha-1}\xi_\rho^\lambda \left|\nabla U\right|^p dx$$
$$\leq C\left(\int_{\text{supp }\nabla\zeta} U^{(p-1)\sigma}\xi_\rho^\lambda dx\right)^{1/\theta}\left(\int_\Omega \xi_\rho^{\lambda-p\theta'}\left|\nabla\xi_\rho\right|^{p\theta'} dx\right)^{1/\theta'}$$
$$\leq C_1\rho^{-p}\left(\int_{\text{supp }\nabla\xi_\rho} U^{(p-1)\sigma}\xi_\rho^\lambda dx\right)^{1/\theta}(\int_{B(x_0,2\rho)} dx)^{1/\theta'}$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega FU^\alpha\xi_\rho^\lambda + \frac{|\alpha|}{2}\int_\Omega U^{\alpha-1}\xi_\rho^\lambda\left|\nabla U\right|^p \leq C\rho^{N/\theta'-p}\left(\int_{\text{supp }\nabla\xi_\rho} U^{(p-1)\sigma}\xi_\rho^\lambda dx\right)^{1/\theta}$$

avec une nouvelle constante C dependante de α et λ.
Maintenant nous prenons $\phi = \xi_\rho^\lambda$ comme fonction test. Nous trouvons

$$\int_\Omega F\xi_\rho^\lambda dx \leq \lambda\int_\Omega \xi_\rho^{\lambda-1}\left|\nabla U\right|^{p-2}\nabla U.\nabla\xi_\rho dx$$
$$\leq \lambda\left(\int_\Omega U_\varepsilon^{\alpha-1}\xi_\rho^\lambda\left|\nabla U\right|^p dx\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega U_\varepsilon^{(1-\alpha)(p-1)}\xi_\rho^{\lambda-p}\left|\nabla\xi_\rho\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

Puisque $\ell > p-1$, nous pouvons fixer un $\alpha \in (1-p, 0)$ telle que $\tau = \sigma/(1-\alpha) > 1$. Alors quand $\varepsilon \to 0$, nous déduisons

$$\int_\Omega F\xi_\rho^\lambda dx \leq C\left(\int_{\text{supp }\nabla\xi_\rho} U^{(p-1)\sigma}\xi_\rho^\lambda dx\right)^{1/\theta p'+1/\tau p}$$
$$\times\left(\int_\Omega \xi_\rho^{\lambda-\theta' p}\left|\nabla\xi_\rho\right|^{\theta' p} dx\right)^{1/\theta' p'}\left(\int_\Omega \xi_\rho^{\lambda-\tau' p}\left|\nabla\xi_\rho\right|^{\tau' p} dx\right)^{1/\tau' p}.$$

Mais $1/\theta p' + 1/\tau p = 1/\sigma = 1 - (1/\theta' p' + 1/\tau' p)$, d'où

$$\int_\Omega F \xi_\rho^\lambda dx \le C \left(\int_{\mathrm{supp}\ \nabla \xi_\rho} U^{(p-1)\sigma} \xi_\rho^\lambda dx \right)^{1/\sigma} \rho^{N(1-1/\sigma)-p}$$

et nous déduisons (2.3.6). Par ailleurs, si $U \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, d'après l'inégalité de Harnack faible, il existe $C' = C'(\sigma, N, p)$ telle que

$$\left(\frac{1}{\rho^N} \int_{B(x_0,2\rho)} U^{(p-1)\sigma} dx \right)^{1/(p-1)\sigma} \le C' \inf \mathrm{ess}_{B(x_0,\rho)} U,$$

d'où nous obtenons (2.3.7) en fixant σ.

Si $U = \mathcal{G}(F)$ considérant $F_n = \min(F, n)$ et $U_n = \mathcal{G}(F_n)$, la suite (U_n) est croissante par le principe de comparaison et satisfait (2.3.7), et U aussi par passage à la limite presque partout. ■

Bibliographie

[1] Allegretto W., and Huang Y.X., *A Picone's identity for the p-Laplacian and Applications*, Nonlinear Anal. 32 (1998), 819-830.

[2] Alvino A., Boccardo L., Ferone V., Orsina L., and Trombetti G., *Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity,* Ann. Mat. Pura Appl. (4), 182 (2003), 53-79.

[3] Alvino A., Ferone V., and Trombetti G., *Estimates for the gradient of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1 data,* Ann. Mat. Pura Appl. 178 (2000), 129-142.

[4] Benilan P., Boccardo L., Gallouet T., Gariepy R., Pierre M., and Vazquez J., *An L^1 theory of existence uniqueness of nonlinear elliptic equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 28 (1995), 241-273

[5] Benilan P., Brézis H., and Crandall M., *A semilinear elliptic equation in* $L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 2 (1975), 523-555.

[6] Bidaut-Véron M.F., *Removable singularities and existence for a quasilinear equation*, Adv. Nonlinear Studies 3 (2003), 25-63

[7] Bidaut-Véron M.F., and Pohozaev S., *Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems*, J. Anal. Mathématique, 84 (2001), 1-49.

[8] Boccardo L., and Gallouet T., *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data,* J Funct. Anal. 87 (1989), 149-169.

[9] Boccardo L., Gallouet T., and Orsina L., *Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non Lin. 13 (1996), 539-555.

[10] Brézis H., and Browder F.E., *Sur une propriété des espaces de Sobolev*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 287(3) : A113–A115, 1978.

[11] Cabre X., and Sanchon M., *Semi-stable and extremal solutions of reaction equations involving the p-Laplacian,* Comm. Pure Appl. Anal. 6 (2007), 43-67.

[12] Dal Maso G., and Malusa A., *Some properties of reachable solutions of nonlinear elliptic equations with measure data,* Ann. Scuola Norm. sup. Pisa, 25 (1997), 375-396.

[13] Dal Maso G., Murat F., Orsina L., and Prignet A., *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 28 (1999), 741-808.

[14] Dall'Aglio A., *Approximate solutions with L^1 data. Application to the H-convergence of parabolic quasi-linear equations,* Ann. Math. Pura Appl. 170 (1996) 207-240.

[15] Dolzmann G., Hungerbühler N., Müller S.,*Uniqueness and maximal regularity for nonlinear elliptic systems of n-Laplace type with measure valued right hand side*. J. Reine Angew. Math. 520 (2000), 1–35.

[16] Fukushima M., Sato K., and Taniguchi S., *On the closable parts of pre-Dirichlet forms and the fine supports of underlying measures*, Osaka J. Math., 28(3) : 517–535, 1991.

[17] Grenon N., *L^r estimates for degenerate elliptic problems,* Potential Anal. 16 (2002), 387-392.

[18] Guedda M. and Véron L., *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. 13 (1989), 879-902.

[19] Kilpeläinen T., and Li G., *Estimates for p-Poisson equations,* Diff. Int. Equ. 13 (2000), 791–800.

[20] Kilpeläinen T., Nageswari Shanmugalingam N., and Zhong X., *Maximal regularity via reverse Hölder inequalities for elliptic systems of n-Laplace type involving measures*, Ark. Mat., 46 (2008), 77–93.

[21] Kinnunen J. and Zhou S., *A local estimate for nonlinear equations with discontinuous coefficients,* Comm. Part. Diff. Equ., 24 (1999), 2043-2068.

[22] Kinnunen J. and Zhou S., *A boundary estimate for nonlinear equations with discontinuous coefficients,* Diff. Int. Equ. 14 (2001), 475-492.

[23] Maeda F.Y., *Renormalized solutions o Dirichlet problems for quasilinear elliptic equations with general measure data*, Hiroshima Math. J., 38 (2008), 51-93.

[24] Peral I., *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, International Center for Theoretical Physics, Trieste 1997.

[25] Petita F., Ponce A. and Porretta A., *New properties of p-Laplacian measure,* preprint.

[26] Raoux T., Thèse de Doctorat, Université de Tours, (1995).

[27] Trudinger N., and Wang X., *Quasilinear elliptic equations with signed measure data,* Discrete Continuous Dyn. Systems, 23 (2009), 477-494.

[28] Tolksdorf P., *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations, 51(1) : 126-150, 1984.

[29] Vázquez J. L., *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim., 12(3) : 191-202, 1984.

Chapitre 3

Connexion entre les deux problèmes $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$

Sommaire

3.1 Introduction

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ et $1 < p \leq N$. Nous désignons par B l'ensemble des fonctions β définies sur un intervalle quelconque $[0, L)$, $L \leq \infty$; satisfaisant

$$\beta \in C^0([0, L)), \; L \leq \infty, \text{ et } \beta \text{ est positive}, \; \beta \not\equiv 0. \tag{3.1.1}$$

On note G l'ensemble des fonctions g définies sur un intervale quelconque $[0, \Lambda)$, $\Lambda \leq \infty$; satisfaisant

$$g \in C^1([0, \Lambda)), \; \Lambda \leq \infty, \; g(0) = 0 \text{ et } g \text{ est croissante}, \; g \not\equiv 0. \tag{3.1.2}$$

Dans la section 3.2 de ce chapitre, on établit une correspondance de B sur G et on donne quelques propriétés élémentaires de cette correspondance. Pour un $\beta \in B$ donné, on considère deux fonctions γ et Ψ définies, par

$$\gamma(t) = \int_0^t \beta(s) ds, \qquad \Psi(t) = \int_0^t e^{\gamma(s)/(p-1)} ds, \tag{3.1.3}$$

pour tout $t \in [0, L)$.
En notant, $\Lambda = \Psi(L)$, on peut définir une fonction $g \in G$, par

$$g(\tau) = e^{\gamma(\Psi^{-1}(\tau))/(p-1)} - 1 = \frac{1}{p-1} \int_0^\tau \beta(\psi^{-1}(s)) ds, \tag{3.1.4}$$

pour tout $\tau \in [0, \Lambda)$.
Réciproquement, pour un $g \in G$ donné on considère la fonction H définie par

$$H(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{1 + g(s)}, \tag{3.1.5}$$

pour tout $\tau \in [0, \Lambda)$.
En notant $L = H(\Lambda)$, on peut définir un $\beta \in B$, par

$$\beta(t) = (p-1) g'(H^{-1}(t)), \tag{3.1.6}$$

pour tout $t \in [0, L)$ et on montre que $H^{-1} = \Psi$.
On note cette bijection entre B et G par T :

$$T : B \longleftrightarrow G.$$

Les fonctions Ψ et H apparaîssent dans l'étude de deux problèmes suivants

$$(P_{u,\lambda}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u) \, |\nabla u|^p + \lambda f & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.7}$$

et

$$(P_{v,\lambda}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda\, f(x)(1+g(v))^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.8}$$

où $\beta \in B$, $g \in G$, λ est un réel strictement positive et f une fonction vérifiant :

$$f \in L^1(\Omega), f \geq 0 \text{ presque partout dans } \Omega. \tag{3.1.9}$$

En fait ; en partant du problème (3.1.7) avec $\beta \in B$, par un calcul formel simple le changement de fonction $v(x) = \Psi(u(x))$ conduit formellement au problème (3.1.8) où $g = T(\beta)$. Réciproquement, en partant du problème (3.1.8) avec $g \in G$; le changement de fonction $u(x) = H(v(x))$ conduit formellement au problème (3.1.7) où $\beta = T^{-1}(g)$.
Ensuite, nous donnons quelques exemples explicites de β qui donne g ou bien le comportement de g et réciproquement. Le lien étant formel entre les deux problèmes (3.1.7) et (3.1.8), notre but principal est de donner un sens à ce lien : c'est le sujet de la troisième section de ce chapitre.
Dans la section 3.3, on établit un lien précis entre ces deux problèmes avec l'apparition possible de mesures. Plus précisement, cette section est consacrée à la démonstration des deux résultats principaux suivants :

Théorème 3.1.1 *Soit β une fonction vérifiant (3.1.1). Supposons que u est une solution renormalisée du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x) + \alpha_s & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.10}$$

telle que $0 \leq u(x) < L$ presque partout dans Ω, où $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$, alors il existe $\mu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$ telle que $v = \Psi(u)$ est une solution atteignable du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+g(v))^{p-1} + \mu & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.11}$$

où $g = T(\beta)$. En particulier v satisfait l'équation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et plus précisement, pour tout $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ telle que h' a un support compact, et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\, \nabla v.\nabla(h(v)\varphi)dx = \lambda \int_\Omega h(v)\varphi\, f(1+g(v))^{p-1}dx + h(\infty)\int_\Omega \varphi\, d\mu. \tag{3.1.12}$$

De plus, si $\beta \in L^1((0,L))$ alors $\mu = e^{\gamma(L)}\alpha_s$ est singulière, et v est une solution renormalisée.
Si $\beta \notin L^1((0,L))$ alors $\alpha_s = 0$.
Si $p = 2$ ou $p = N$, alors dans tous les cas μ est singulière et v est une solution renormalisée.

Dans le sens inverse on a le résultat suivant :

Théorème 3.1.2 *Soit g une fonction vérifiant (3.1.2). Supposons que v est une solution renormalisée du problème (3.1.11) telle que $0 \le v < \Lambda$ dans Ω avec $\mu = \mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$. Alors il existe α_s telle que $u = H(v)$ est une solution renormalisée du problème (3.1.10), où $\beta = T^{-1}(g)$.*

De plus, $\alpha_s = 0$, si $\mu_s = 0$, ou $\Lambda < +\infty$, ou $\Lambda = +\infty$ et $\lim_{k\to+\infty} g(k) = +\infty$.
Si $\Lambda = +\infty$ et $\lim_{k\to+\infty} g(k) < +\infty$ alors $\alpha_s = \mu_s/(1+g(+\infty))^{p-1}$, où $g(+\infty) = \lim_{k\to+\infty} g(k)$.

Notre première application de ces résultats apparaît dans l'étude du problème (3.1.7) dans le cas particulier où $\beta = p-1$ avec $f \not\equiv 0$ vérifiant (3.1.9) et son problème correspondant (3.1.8) où $g(v) = v$: c'est le sujet de la section 3.4. L'existence est liée à un problème de valeur propre avec poids f,

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \lambda f(x)\,|w|^{p-2}\,w & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1.13}$$

plus précisément à sa première valeur propre

$$\lambda_1(f) = \inf_{\substack{w\in W_0^{1,p}(\Omega)\\ w\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^p\,dx}{\int_\Omega f\,|w|^p\,dx}. \tag{3.1.14}$$

et on montre le résultat suivant :

Théorème 3.1.3 *Soit $\beta(u) \equiv p-1$, et $g(v) = v$ sa transformée par T.*

*(i) Si $0 < \lambda < \lambda_1(f)$ alors il existe une solution unique $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.1.8), donc une solution **unique** $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.1.7) telle que $e^{u_0} - 1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*
Si $f \in L^{N/p}(\Omega)$, alors $u_0, v_0 \in L^k(\Omega)$ pour tout $k > 1$.
Si $f \in L^r(\Omega)$ avec $r > N/p$, alors u_0 et $v_0 \in L^\infty(\Omega)$.

De plus, si $f \in L^r(\Omega)$ avec $r > N/p$, alors pour toute mesure $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$, il existe une solution renormalisée v_s de

$$\begin{cases} -\Delta_p v_s = \lambda f(x)(1+v_s)^{p-1} + \mu_s & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad v_s = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega; \end{cases} \tag{3.1.15}$$

*donc il existe une **infinité** de solutions $u_s = \ln(1+v_s) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.1.7), moins régulière que u_0.*

(ii) Si $\lambda > \lambda_1(f) \ge 0$, ou $\lambda = \lambda_1(f) > 0$ et $f \in L^{N/p}(\Omega)$, alors (3.1.7), (3.1.8) et (3.1.15) n'admettent pas de solutions renormalisées.

3.2 Changement ponctuel de fonctions

3.2.1 Définitions et propriétés

Dans cette sous section on donne une correspondance entre la classe des fonctions B satsfaisant (3.1.1) et la classe des fonctions G vérifiant (3.1.2).
Soit $\beta \in B$. Pour tout $t \in [0, L)$ on définit

$$\gamma(t) = \int_0^t \beta(s)ds, \qquad \Psi(t) = \int_0^t e^{\gamma(s)/(p-1)}ds$$

Il est évident que la fonction Ψ est strictement croissante, par conséquense elle admet une fonction réciproque définie sur $\Psi([0, L)) = [0, \Lambda)\,, \Lambda = \Psi(L) \leq \infty$. Introduisons la fonction suivante

$$\tau \in [0, \Lambda) \mapsto g(\tau) = e^{\gamma(\Psi^{-1}(\tau))/(p-1)} - 1 = \frac{1}{p-1}\int_0^\tau \beta(\Psi^{-1}(s))ds \tag{3.2.1}$$

Alors on a

Proposition 3.2.1 *Soit β vérifiant (3.1.1) et g la fonction définie par (3.2.1). Alors g satisfait l'hypothèse (3.1.2) et on a $\Psi^{-1} = H$, où H est la fonction définie par (3.1.5).*

Preuve. On montre que $H = \Psi^{-1}$ en effectuant le changement de variable simple $s = \Psi(\tau)$:

$$H(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{1 + g(s)} = \int_0^\tau \frac{ds}{e^{\gamma(\Psi^{-1}(s))/(p-1)}} = \int_0^{\Psi^{-1}(\tau)} \frac{\Psi'(\tau)d\tau}{e^{\gamma(\tau))/(p-1)}} = \Psi^{-1}(\tau)$$

■

L'expression (3.1.5) nous a permis d'obtenir Ψ^{-1} en fonction de g. Grâce à cette expression, on obtient la réciproque : considerons une fonction $g \in G$. Il est évident que la fonction H est strictement croissante, par conséquent elle admet une fonction réciproque définie sur $H([0, \Lambda)) = [0, L)\,, L = H(\Lambda) \leq \infty$. Introduisons la fonction suivante

$$t \in [0, L) \mapsto \beta(t) = (p-1)g'(H^{-1}(t)). \tag{3.2.2}$$

Alors on a

Proposition 3.2.2 *Soit g vérifiant(3.1.2), alors la fonction β définie par (3.2.2) satisfait (3.1.1) et on a $H^{-1} = \psi$.*

Remarque 3.2.3 *En notant* $\tau = \Psi(t)$ *on obtient les relations suivantes :*

$$\beta(t) = (p-1)g'(\tau), \quad 1 + g(\tau) = e^{\gamma(t)/(p-1)} \tag{3.2.3}$$

et par suite β *est croissante si et seulement si* g *est convexe. Nous remarquons que la corrélation entre* g *et* β ***n'est pas monotone**; nous avons seulement : si* $g_1' \leq g_2'$*, alors* $\beta_1 \leq \beta_2$.

Maintenant, notons quelques propriétés élémentaires de cette correspondance

Proposition 3.2.4 *Soit* $(\beta, g) \in B \times G$*, telle que* $g = T(\beta)$*. On a les propriétés suivantes*

$$L = \infty \Longrightarrow \Lambda = \infty. \tag{3.2.4}$$

$$L < \infty \Longleftrightarrow 1/(1+g(s)) \in L^1((0,\Lambda)) \tag{3.2.5}$$

$$\Lambda < \infty \Longleftrightarrow e^{\gamma(\theta)/(p-1)} \in L^1((0,L)) \tag{3.2.6}$$

$$\gamma(L) < \infty \Longleftrightarrow \beta \in L^1((0,L)) \Longleftrightarrow g \text{ est bornée} \tag{3.2.7}$$

Preuve. On remarque facilement que $\Psi(t) \geq t$ pour $t \in [0, L)$, d'où on obtient (3.2.4). Les deux propriétés (3.2.6), (3.2.5) se découlent directement des définitions de Ψ et H. Puisque $g([0,\Lambda)) = \left[0, e^{\gamma(L)}\right)$, même pour $L = \infty$, on conclut $\gamma(L) < +\infty \Longleftrightarrow g$ est bornée. Par la definition de γ on deduit $\gamma(L) < \infty \Longleftrightarrow \beta \in L^1((0,L))$, d'où on a (3.2.7). ■

Remarque 3.2.5 *Puisque* g *est croissante, alors elle admet une limite finie ou infinie lorsque* $k \nearrow \Lambda$*, donc (3.2.7) est équivalente à*

$$\lim_{v \longrightarrow \Lambda} (1 + g(v))^{p-1} = e^{\gamma(L)} < +\infty$$

Dans la proposition suivante on donne quelques relations entre les comportements de $\beta(t)$ lorsque $t \to L$ et $\dfrac{g(s)}{s}$ lorsque $s \to \Lambda$:

Proposition 3.2.6 *on a les propriétés suivantes*
(i) $\liminf_{t\to L} \beta(t) > 0 \Longrightarrow \liminf_{t\to\Lambda} g(s)/s > 0.$
(ii) $\lim_{t\longrightarrow L} \beta(t) = \infty \Longrightarrow \lim_{s\longrightarrow\Lambda} g(s)/s = \infty$*. La réciproque est vraie si* β *est croissante au voisinage de* L*.*

Preuve. (i) Si $\liminf_{t\to L} \beta(t) > 0$ alors il existe $C > 0$ et $\delta \in (0, L)$ telles que $\beta(t) \geq C$ pour tout $t \in (\delta, L)$, par suite $(p-1)g'(s) \geq C$ pour tout $s \in (\psi(\delta), \Lambda)$. En integrant de 0 à s on obtient $(p-1)g(s) \geq C\, s$ pour tout $s \in (\psi(\delta), \Lambda)$.

(ii) Supposons $\lim_{t\longrightarrow L} \beta(t) = \infty$. Puisque $s \to \Lambda \Leftrightarrow t = H(s) \to H(\Lambda) = L$, alors

$$\lim_{s\to\Lambda} g'(s) = \frac{1}{p-1} \lim_{H(s)\to H(\Lambda)} \beta(H(s)) = \frac{1}{p-1} \lim_{t\to L} \beta(t) = +\infty;$$

donc, par la règle de l'Hôpital, on a $\lim_{s\longrightarrow\Lambda} g(s)/s = \infty$. ■

3.2.2 Exemples

Dans cette sous section, nous donnons quelques exemples explicites de β et g, pour lesquelles on peut calculer leurs fonctions correspondantes par la transformation T. Nous donnons quelques exemples pour lesquelles le calcul est très difficile, mais ce sont des bons modèles liant le comportement de β au voisinage de L et g au voisinage de Λ. Le calcul est plus facile en partant d'une fonction donnée g, on calcule u en utilisant (3.1.5) et β par (3.2.2).

Les exemples montrent que la corrélation est sensible par rapport à β : **une petite perturbation sur β peut impliquer une forte perturbation sur** g.
Les exemples $1, 2, 5, 6$ sont remarquables, puisqu'ils conduisent à des équations **bien connues** en v. L'exemple 10 est un modèle qui conduit à un **nouveau type** d'équation en v, presentant une singularité. Le flèche $\leftrightarrow$ indique le lien formel entre les deux problèmes en u et v.

1°) Cas où β est définie sur $[0, \infty)$ **(** $L = \infty = \Lambda$).

1) *β constante, g linéaire :*

Soit $\beta(u) = p - 1$, d'après (3.1.3) on a

$$\gamma(t) = \int_0^t \beta(u)du = (p-1)t, \quad \Psi(t) = \int_0^t e^{\gamma(s)/(p-1)}ds = \int_0^t e^s ds = e^t - 1$$

et d'après (3.2.1) on a

$$g(v) = \frac{1}{p-1}\int_0^v \beta(\Psi^{-1}(t))dt = \frac{1}{p-1}\int_0^v (p-1)dt = v$$

donc $v = e^u - 1$, $u = \Psi^{-1}(v) = \ln(1+v)$ et on a l'équivalence formelle des deux problèmes :

$$-\Delta_p u = (p-1)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x) \quad \leftrightarrow \quad -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+v)^{p-1}.$$

2) *g est de type puissance et sous-linéaire :*

Soit $0 < Q < p - 1$; posons $\alpha = Q/(p-1) < 1$, et $\beta(u) = \dfrac{(p-1)\alpha}{(1+(1-\alpha)u)}$, alors $(1-\alpha)u = (1+v)^{1-\alpha} - 1$ et $(1+g(v))^{p-1} = (1+v)^Q$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\gamma(t) = \int_0^t \frac{(p-1)\alpha}{(1+(1-\alpha)s)}ds &= ((p-1)\alpha/(1-\alpha))\ln(1+(1-\alpha)t)\\ &= (p-1)\ln(1+(1-\alpha)t)^{\alpha/(1-\alpha)}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \int_0^t e^{\ln(1+(1-\alpha)s)^{\alpha/(1-\alpha)}}ds = \int_0^t (1+(1-\alpha)s)^{\alpha/(1-\alpha)}ds\\ &= (1+(1-\alpha)t)^{1/(1-\alpha)} - 1\end{aligned}$$

d'où $v = \Psi(u) = (1+(1-\alpha)u)^{1/(1-\alpha)} - 1$ et $\Psi^{-1}(v) = u = \frac{1}{1-\alpha}((1+v)^{1-\alpha} - 1)$, par suite d'après la définition (3.2.1), on trouve

$$\begin{aligned} 1+g(v) &= e^{\gamma(\Psi^{-1}(v))/(p-1)} = e^{\gamma(u)/(p-1)} = e^{\ln(1+(1-\alpha)u)^{\alpha/(1-\alpha)}} \\ &= (1+(1-\alpha)u)^{\alpha/(1-\alpha)} = (1+v)^{\alpha} \end{aligned}$$

donc $(1+g(v))^{p-1} = (1+v)^Q$ et

$$-\Delta_p u = \frac{(p-1)\alpha}{1+(1-\alpha)u} |\nabla u|^p + \lambda f(x) \quad \leftrightarrow \quad -\Delta_p v = \lambda f(x)(1+v)^Q;$$

Dans cet exemple, il est clair que g n'est pas bornée et elle est concave, donc β est décroissante, et $\beta(u) \sim C/u$ au voisinage de ∞, donc $\beta \notin L^1((0,\infty))$.

3) *β est de type puissance, g est de type logarithmique.*

(*i*) Soit $\beta(u) = (p-1)u^m$, $m > 0$, alors $g(v) \sim Cv(\ln v)^{m/(m+1)}$, avec $C = (m+1)^{m/(m+1)}$. En effet, on a

$$\gamma(t) = \int_0^t (p-1)u^m du = ((p-1)/(m+1))u^{m+1} \text{ et } v = \Psi(u) = \int_0^u e^{\frac{s^{m+1}}{m+1}} ds$$

Integrons par parties l'intégrale $I(u) = \int_1^u s^{-(m+1)} e^{s^{m+1}/(m+1)} ds$, en posant $U = e^{\frac{s^{m+1}}{m+1}}$ et $V' = s^{-(m+1)}$, donc $U' = s^m e^{\frac{s^{m+1}}{m+1}}$ et $V = -\frac{1}{m}s^{-m}$ on trouve que

$$I(u) = \int_1^u s^{-(m+1)} e^{\frac{s^{m+1}}{m+1}} ds = \frac{e^{(m+1)^{-1}}}{m} + \frac{1}{m} u^{-m} e^{\frac{u^{m+1}}{m+1}} + \frac{1}{m} \int_1^u e^{\frac{s^{m+1}}{m+1}} ds$$

donc

$$J(u) = \int_1^u e^{\frac{s^{m+1}}{m+1}} ds = -e^{(m+1)^{-1}} + u^{-m} e^{\frac{u^{m+1}}{m+1}} + m\, I(u)$$

Posons $Z(u) = u^{-m} e^{\frac{u^{m+1}}{m+1}}$. On a $Z(u) \to \infty$ et $I(u) \to \infty$ si $u \to \infty$. Mais

$$\frac{I'(u)}{Z'(u)} = \frac{u^{-(m+1)} e^{\frac{u^{m+1}}{m+1}}}{(1 - m\, u^{-(m+1)}) e^{\frac{u^{m+1}}{m+1}}} = \frac{1}{u^{m+1} - m} \to 0$$

lorsque $u \to \infty$. Donc, par la règle de l'Hôpital on conclut que $I(u)/Z(u)$ tend vers 0 si $u \to \infty$. Il en résulte que

$$\frac{J(u)}{Z(u)} = -\frac{e^{(m+1)^{-1}}}{Z(u)} + m\frac{I(u)}{Z(u)} + 1$$

tend vers 1 si $u \to \infty$; c'est à dire $J(u) \sim Z(u)$ à l'infini. Par suite $v = \Psi(u) \sim u^{-m} e^{\frac{u^{m+1}}{m+1}}$ à l'infini. De plus, on a

$$\frac{(\ln \Psi(u))'}{u^m} = \frac{\Psi'(u)}{u^m \Psi(u)} = \frac{e^{\frac{u^{m+1}}{m+1}}}{u^m \Psi(u)} = \frac{u^{-m} e^{\frac{u^{m+1}}{m+1}}}{\Psi(u)} \overset{u\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc, par la règle de l'Hôpital on trouve que $\ln v = \ln \Psi(u) \sim u^{m+1}/(m+1)$ ou bien, $u \sim ((m+1)\ln\, v)^{1/(m+1)}$ à l'infini.
Maintenant, d'après (3.2.1) et l'expression de γ, on a

$$1 + g(v) = e^{\gamma(u)/(p-1)} = e^{\frac{u^{m+1}}{m+1}} = u^m u^{-m} e^{\frac{u^{m+1}}{m+1}},$$

ce qui est équivalent à l'infini à $((m+1)\ln\, v)^{m/(m+1)} v = C\, v(\ln\, v)^{m/(m+1)}$.

(ii) Dans le sens inverse, soit $1 + g(v) = (1 + Cv)(1 + \ln(1 + Cv))^{m/(m+1)}$, avec $m > 0, C > 0$, alors on obtient exactement

$$Cu = (m+1)((1 + \ln(1+v))^{1/(m+1)} - 1),$$

et

$$\beta(u) = (p-1)C((1 + \frac{Cu}{m+1})^m + \frac{C\,m}{m+1+Cu}),$$

alors $\beta(u) \sim Ku^m$ au voisinage de $+\infty$, avec $K = (p-1)C^{m+1}(m+1)^{-m}$. En effet, en posant $\theta = \ln(1 + Cs)$ on obtient

$$\begin{aligned} u = H(v) &= \int_0^v \frac{ds}{(1+Cs)(1+\ln(1+Cs))^{m/(m+1)}} \\ &= \int_0^{\ln(1+Cv)} \frac{d\theta}{C(1+\theta)^{m/(m+1)}} \\ &= \frac{m+1}{C}((1+\ln(1+Cv))^{1/(m+1)} - 1) \end{aligned}$$

d'où $Cu = (m+1)((1+\ln(1+Cv))^{1/(m+1)} - 1)$, donc $(1+\ln(1+Cv))^{1/(m+1)} = 1 + \frac{Cu}{m+1}$.
D'après la définition (3.2.2) de β, on a $\beta(u) = (p-1)g'(v)$. Calculons $g'(v)$ on trouve

$$\begin{aligned} g'(v) &= C(1+\ln(1+Cv))^{m/(m+1)} + \frac{Cm}{m+1}(1+\ln(1+Cv))^{-\frac{1}{m+1}} \\ &= C(1+\frac{Cu}{m+1})^m + \frac{Cm}{m+1}(1+\frac{Cu}{m+1})^{-1} \\ &= C(1+\frac{Cu}{m+1})^m + \frac{Cm}{m+1+Cu} \end{aligned}$$

4) *β est de type exponentiel, g est de type logarithmique* . On donne les trois exemples suivants :

- Soit $\beta(u) = (p-1)e^u$, alors $g(v) \sim v\ln v$ au voisinage de ∞. En effet :

$$\gamma(t) = (p-1)(e^u - 1),\ \Psi(t) = e^{-1}\int_0^t e^{e^s} ds.$$

Integrons par parties l'intégrale $I(u) = \int_0^u e^{-s}e^{e^s}ds$, en posant $U = e^{e^s}$, $V' = e^{-s}$ et donc $U' = e^s e^{e^s}$, $V = -e^{-s}$; on obtient

$$\begin{aligned} I(u) = \int_0^u e^{-s}e^{e^s}ds &= e - e^{-u}e^{e^u} + \int_0^t e^{e^s}ds \\ &= e - e^{e^u - u} + e\Psi(u) \end{aligned}$$

et en utilisant la règle de l'Hôpital on conclut que $I(u)/e^{e^u-u}$ tend vers 0 lorsque $u \to \infty$. Il en résulte que $v = \Psi(u) \sim e^{e^u-u-1}$ au voisinage de ∞. De plus, on a

$$\frac{(\ln \Psi(u))'}{e^{u+1}} = \frac{\Psi'(u)}{e^{u+1}\Psi(u)} = \frac{e^{e^u-u-1}}{\Psi(u)} \stackrel{u\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc, d'après la règle de l'Hôpital ; $\ln v = \ln \Psi(u) \sim e^{u+1}$ au voisinage de ∞. Finalement, on a

$$1 + g(v) = e^{\gamma(u)/(p-1} = e^{e^u} = e^{e^u-u-1}e^{u+1} \sim v \ln v,$$

au voisinage de ∞.

• Soit $\beta(u) = (p-1)(e^u+1)$, alors on calcule exactement $1+g(v) = (1+v)(1+\ln(1+v))$ et $u = \ln(1 + \ln(1 + v))$, en effet $\gamma(t) = (p-1)(t + e^t - 1)$ et

$$v = \Psi(u) = e^{-1}\int_0^u e^s e^{e^s}ds = e^{-1}(e^{e^u} - e) = e^{e^u-1} - 1,$$

d'où on trouve u et

$$1 + g(v) = e^{\gamma(u)/(p-1} = e^{u+e^u-1} = e^{e^u-1}e^u = (1 + v)(1 + \ln(1 + v)),$$

et les deux problèmes suivants en u et v sont formellement équivalents :

$$-\Delta_p u = (p-1)(e^u + 1)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x) \;\leftrightarrow\; -\Delta_p v = \lambda f(x)((1 + v)(1 + \ln(1 + v)))^{p-1}.$$

• Soit $\beta(u) = (p-1)(e^{e^u+u} + e^u + 1)$, on vérifie que $e^{e+1}v = e^{e^{e^u}} - e^e$ et $1 + g(v) \sim v \ln v \ln(\ln v))$ au voisinage de ∞. En effet :

$$\gamma(t) = (p-1)\int_0^t (e^s e^{e^s} + e^s + 1)ds = (p-1)(e^{e^t} + e^t + t - (e + 1)),$$

et

$$\begin{aligned} v = \Psi(u) &= e^{-(e+1)}\int_0^u e^{e^{e^s}+e^s+s}ds \\ &= e^{-(e+1)}\int_0^u e^{e^{e^s}}e^{e^s}e^s ds = e^{-(e+1)}(e^{e^{e^u}} - e^e), \end{aligned}$$

d'où on tire l'expression de v en fonction de u et

$$\begin{aligned}
1+g(v) &= e^{\gamma(u)/(p-1} = e^{-(e+1)}e^{e^{e^u}+e^u+u} = e^{-(e+1)}e^{e^{e^u}}e^{e^u}e^u \\
&= e^{-1}(1+ev)(e+\ln(1+ev))(\ln(e+\ln(1+ev)) \\
&\sim v\ln v\ln(\ln v),
\end{aligned}$$

au voisinage de ∞.

2°) Cas où β a une asymptote ($L<\infty$), mais g est définie sur $[0,\infty)$. C'est le cas où $1/(1+g(s))\in L^1((0,\infty))$.

5) *g est de type puissance et sur-linéaire :*

Soit $Q>p-1$; posons $\alpha=Q/(p-1)>1$, et $\beta(u)=(p-1)\alpha/(1-(\alpha-1)u)$, avec $L=1/(\alpha-1)$, nous vérifions que $(1+g(v))^{p-1}=(1+v)^Q$ et $(\alpha-1)u=1-(1+v)^{1-\alpha}$. Le calcul est plus facile en partant de g, on trouve

$$u=H(v)=\int_0^v\frac{ds}{(1+s)^\alpha}$$

d'où $L=H(\infty)=1/(\alpha-1)$ puisque $\alpha>1$, et $u=\frac{1}{1-\alpha}((1+v)^{1-\alpha}-1)$ et $\beta(u)=(p-1)g'(v)=(p-1)\alpha(1+v)^{\alpha-1}=(p-1)\alpha/(1+v)^{1-\alpha}=(p-1)\alpha/(1-(\alpha-1)u)$. Donc

$$-\Delta_p u=\frac{(p-1)\alpha}{1-(\alpha-1)u}|\nabla u|^p+\lambda f(x)\quad\leftrightarrow\quad-\Delta_p v=\lambda f(x)(1+v)^Q.$$

Un autre exemple est le cas $\beta(u)=2(p-1)tgu$ avec $L=\pi/2$, où $1+g(v)=1+v^2$, et $u=Arctgv$. Le calcul est simple en partant de g.

6) *g est de type exponentiel :*

Soit $\beta(u)=(p-1)/(1-u)$ avec $L=1$, alors pour tout $t\in[0,1)$

$$\gamma(t)=(p-1)\int_0^t\frac{ds}{1-s}=-(p-1)\ln(1-t),$$

et pour tout $0\le u<1$ on a

$$v=\Psi(u)=\int_0^u e^{-\ln(1-s)}ds=-\ln(1-u),$$

donc $\Lambda=+\infty$, $u=1-e^{-v}$ et $1+g(v)=e^{\gamma(u)/(p-1)}=e^{-\ln(1-u)}=e^{-\ln e^{-v}}=e^v$ et donc :

$$-\Delta_p u=\frac{p-1}{1-u}|\nabla u|^p+\lambda f(x)\quad\leftrightarrow\quad-\Delta_p v=\lambda f(x)e^{(p-1)v}.$$

7) *g est de type logarithmique :*

Soit $\beta(u) = (p-1)k/(1-u)^{k+1}$, $k > 0$ avec $L = 1$, alors on obtient $g(v) \sim kv(\ln v))^{(k+1)/k}$ au voisinage de ∞. Réciproquement, si $1 + g(v) = (1 + kv)(1 + \ln(1 + kv))^{(k+1)/k}$, alors $\beta(u) = (p-1)(k/(1-u)^{k+1} + (k+1)/(1-u))$, donc $\beta(u) \sim (p-1)k/(1-u)^{k+1}$ au voisinage de 1. Les calculs sont analogues à celles de l'exemple 3.
Remarquons que β a une singularité plus forte que celle de l'exemple 6, mais g a une croissance plus lente.

8) *g est de type d'une exponentielle forte e^{e^v} :*

Soit $\beta(u) = \dfrac{p-1}{1-u}(1-(\ln\dfrac{e}{1-u})^{-1})$ avec $L = 1$, alors $1+g(v) = e^{e^v-v-1}$, $u = 1-e^{1-e^v}$.
Le calcul est simple en partant de g, on a

$$u = H(v) = e\int_0^v e^{-e^s}e^s ds = e(e^{-1} - e^{-e^v}) = 1 - e^{1-e^v}$$

donc $u \nearrow 1$ lorsque $v \nearrow \infty$, par suite $L = 1$. De plus on obtient $e^{e^v-1} = (1-u)^{-1}$ et $e^v = \ln\frac{e}{1-u}$. Calculons $g'(v)$ en fonction de u on trouve

$$g'(v) = (e^v - 1)e^{e^v-v-1} = e^{e^v-1}(1-e^{-v}) = (1-u)^{-1}(1-(\ln\frac{e}{1-u})^{-1}),$$

d'où on obtiont $\beta(u) = (p-1)g'(v)$.
Remarquons que β a une singularité du même type que l'exemple 6.

3°) Cas où β et g ont des asymptotes ($L < \infty$ et $\Lambda < \infty$).

9) Soit $Q > 0$. Posons $\alpha = Q/(p-1) > 0$, et $\beta(u) = (p-1)\alpha/(1-(\alpha+1)u)$, avec $L = 1/(\alpha+1)$, on obtient $(1+g(v))^{p-1} = (1-v)^{-Q}$ avec $\Lambda = 1$ et $(\alpha+1)u = 1-(1-v)^{\alpha+1}$:

$$-\Delta_p u = \frac{(p-1)\alpha}{1-(\alpha+1)u}|\nabla u|^p + \lambda f(x) \quad \leftrightarrow \quad -\Delta_p v = \frac{\lambda f(x)}{(1-v)^Q}$$

10) $\beta(u) = (p-1)u/(1-u^2)$ avec $L = 1$, alors $1 + g(v) = 1/\cos v$ avec $\Lambda = \pi/2$ et $u = \sin v$.

3.3 Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2

Cette sous section est consacrée à la démonstration des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2. Tout d'abord, notons les difficultés liées au *p-Laplacien*. La connexion entre les problèmes $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$ induit des mesures, alors nous ne pouvons pas utiliser des approximations par des fonctions régulières, parce que l'unicité de solutions du problème (2.2.2) n'est pas assurée lorsque la partie singulière de la mesure est non nulle, voir la remarque 2.2.8. Pour cela nous utilisons les équations satisfaites par les troncatures, voir la définition 2.2.11. Dans l'article de Malusa [7], l'auteur a utilisé ces équations pour simplifier la démonstration du résultat de stabilité de [4].

Remarque 3.3.1 *(i) Si $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $u = H(v) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. En effet $u \leq v$, et $\nabla u = \nabla v/(1 + g(v))$.*

(ii) Si $L = \infty$ et $\liminf_{t\to\infty} \beta(t) > 0$, et u est une solution renormalisée de $(P_{u,\lambda})$ alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$; en effet $\beta(t) \geq m > 0$ pour $t \geq K_0 > 0$, donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx &= \int_{\{u>K_0\}} |\nabla u|^p \, dx + \int_{\{u\leq K_0\}} |\nabla u|^p \, dx \\ &\leq \frac{1}{m} \int_\Omega \beta(u) \, |\nabla u|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla T_{K_0}(u)|^p \, dx.\end{aligned}$$

Remarque 3.3.2 *(i) Si u est une solution du problème (3.1.10), où $0 \leq u(x) < L$ presque partout dans Ω , et si $L < \infty$, alors $\alpha_s = 0$ d'après la remarque 2.2.10, et $u = T_L(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*
De même, si v est une solution de (3.1.11), où $0 \leq v(x) < \Lambda$ presque partout dans Ω, et $\Lambda < \infty$, alors $\mu_s = 0$, et $v = T_\Lambda(v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

(ii) Si u est une solution renormalisée de (3.1.10), alors la p-capacité de l'ensemble $\{u = L\}$ est 0. Cela résulte par exemple de [4, remarque 2.11] pour $L = \infty$, et par [4, proposition 2.1] appliquée à $(u - L)^+$ si $L < \infty$. De même, si v est une solution renormalisée de (3.1.11), alors la p-capacité de l'ensemble $\{v = \Lambda\}$ est 0.

Pour la démonstration des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2, on établit les trois lemmes suivants :

Lemme 3.3.3 *Soit $(\beta, g) \in B \times G$ telle que $g = T(\beta)$. Pour tout $K \in (0, L)$, $k \in (0, \Lambda)$, soient $\alpha_K, \mu_k \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$ telles que :*

$$\mu_k = (1 + g(k))^{p-1} \alpha_K, \text{ pour } k = \Psi(K). \tag{3.3.1}$$

Alors, on a :

*(i) Si μ_k converge vers $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ pour la topologie étroite (respectivement faible *) des mesures lorsque $k \nearrow \Lambda$, alors α_K converge étroitement (respectivement faiblement *) vers un $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ lorsque $K \nearrow L$. Plus précisément, $\alpha_s = 0$, si $\mu_s = 0$ ou $\lim_{k\to\Lambda} g(k) = +\infty$. Si $\lim_{k\to\Lambda} g(k) < +\infty$ alors $\alpha_s = \mu_s/(1 + g(\Lambda))^{p-1}$, où $g(\Lambda) = \lim_{k\to+\infty} g(k)$.*

*(ii) Si $\beta \in L^1((0, L))$ et α_K converge étroitement (respectivement faiblement *) vers un $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ lorsque $K \nearrow L$, alors μ_k converge vers $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ pour la topologie étroite (respectivement faible *) des mesures, où*

$$\mu_s = (1 + g(\Lambda))^{p-1} \alpha_s = e^{\gamma(L)} \alpha_s.$$

Lemme 3.3.4 *Supposons que u est une solution renormalisée du problème (3.1.10), où $0 \leq u(x) < L$ presque partout dans Ω et considérons $v = \Psi(u)$. Pour tout $K > 0$, $k > 0$ il existe $\alpha_K, \mu_k \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$ telles que :*

(i) Les fonctions tronquées $T_K(u)$, $T_k(v)$ satisfaisent les équations

$$-\Delta_p T_K(u) = \beta(T_K(u)) \, |\nabla T_K(u)|^p + \lambda f \chi_{\{u<K\}} + \alpha_K \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{3.3.2}$$

$$-\Delta_p T_k(v) = \lambda f (1 + g(v))^{p-1} \chi_{\{v<k\}} + \mu_k \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \tag{3.3.3}$$

(ii) Pour tout $K \in (0, L)$, en posant $k = \Psi(K)$ on a la relation (3.3.1).

(iii) la suite de mesures $(\alpha_K)_{0<K<L}$ converge pour la topologie étroite des mesures vers α_s lorsque $K \nearrow L$.

Réciproquement on a le lemme suivant :

Lemme 3.3.5 *Supposons que v est une solution renormalisée du problème (3.1.11), où $0 \leq v(x) < \Lambda$ presque partout dans Ω et considérons $u = H(v)$. Pour tout $k > 0$, $K > 0$ il existe $\mu_k, \alpha_K \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$ telles que :*

(i) Les fonctions tronquées $T_k(v)$, $T_K(u)$ satisfont respectivement les équations (3.3.3), (3.3.2).

(ii) Pour tout $k \in (0, \Lambda)$, en posant $K = H(k)$ on a la relation (3.3.1).

(iii) μ_k converge vers μ_s pour la topologie étroite des mesures lorsque $k \nearrow \Lambda$.

Preuves des lemmes 3.3.3, 3.3.4 et 3.3.5.

Preuve du lemme 3.3.3 Posons $z_k = (1 + g(k))^{1-p}$, $K = H(k)$, on a $\alpha_K = z_k \mu_k$. Puisque g est croissante sur $(0, \Lambda)$ alors elle admet une limite (finie ou infinie) lorsque $k \nearrow \Lambda$. Notons $g(\Lambda) = \lim\limits_{k\to\Lambda} g(k)$, dans les deux cas où Λ est finie ou non. Donc z_k admet une limite avec

$$\lim_{k\to\Lambda} z_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lim\limits_{k\to\Lambda} g(k) = +\infty, \\ (1 + g(\Lambda))^{1-p} = z & \text{si} \quad \lim\limits_{k\to\Lambda} g(k) = g(\Lambda) < +\infty. \end{cases}$$

Maintenant, pour tout $\phi \in C_b(\Omega)$ (respectivement $\phi \in C_c(\Omega)$), on a

$$\int_\Omega \phi \, d\alpha_K = z_k \int_\Omega \phi \, d\mu_k$$

Donc, par la convergence étroite de μ_k vers μ_s on déduit que $\displaystyle\int_\Omega \phi \, d\alpha_K$ converge vers 0 si $\lim\limits_{k\to\Lambda} g(k) = +\infty$ et $z \displaystyle\int_\Omega \phi \, d\mu_s$ si $\lim\limits_{k\to\Lambda} g(k) < +\infty$ lorsque $K \nearrow L$. D'où , on conclut que α_K

converge étroitement (respectivement faiblement *) dans $\mathcal{M}_b(\Omega)$ vers 0 si $\lim_{k\to\Lambda} g(k) = +\infty$ et $z\mu_s$ si $\lim_{k\to\Lambda} g(k) < +\infty$. D'où (i).
Pour (ii), la suite $z_k^{-1} = (1+g(k))^{p-1} = e^{\gamma(K)}$ admet une limite finie égale à $(1+g(\Lambda))^{p-1} = e^{\gamma(L)}$ si et seulement si g est bornée, ce qui est équivalent à $\beta \in L^1((0,L))$, d'après (3.2.7). D'où (ii).

Preuve du lemme 3.3.4 : Supposons que u est une solution renormalisée de (3.1.10). Pour tout $K > 0$, considérons la fonction $T_K(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
D'après la définition 2.2.11 il existe $\alpha_K \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$, concentrée sur l'ensemble $\{u = K\}$, qui converge étroitement vers α_s lorsque $K \to +\infty$, telle que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla T_K(u)|^{p-2} \nabla T_K(u).\nabla\psi dx &= \int_{\{U<K\}} (\beta(u) |\nabla u|^p + \lambda f)\psi dx + \int_\Omega \psi d\alpha_K \\ &= \int_\Omega (\beta(T_K(u)) |\nabla T_K(u)|^p \psi dx + \int_{\{u<K\}} \lambda f \psi dx + \int_\Omega \psi d\alpha_K \qquad (3.3.4)\end{aligned}$$

pour tout $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. En d'autre termes on obtient l'équation (3.3.2) vérifié par la troncature $T_K(u)$.
Considerons maintenant le changement de fonction $v = \Psi(u)$, on a $0 \le v < \Lambda$. Pour $K \in (0,L)$, soit $k = \Psi(K) \in (0,\Lambda)$. Alors, puisque Ψ est strictement croissante, on a

$$\begin{aligned}T_k(v) &= \begin{cases} v = \Psi(u) & \text{si} \quad v = \Psi(u) \le k, \\ k & \text{si} \quad v = \Psi(u) > k; \end{cases} \\ &= \begin{cases} \Psi(u) & \text{si} \quad u \le K, \\ \Psi(K) & \text{si} \quad u > K; \end{cases}\end{aligned}$$

donc $T_k(v) = \Psi(T_K(u))$. Par conséquent par le théorème de dérivation fonctions composées (chain rule), $T_k(v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ car Ψ est continue sur $(0,L)$ et $T_K(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $\|T_K(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \le K < L$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\nabla T_k(v) &= \Psi'(T_K(u))\nabla T_K(u) = e^{\gamma(T_K(u))/(p-1)}\nabla T_K(u) \\ &= e^{\gamma(u)/(p-1)}\nabla T_K(u). \qquad (3.3.5)\end{aligned}$$

Puisque Ψ est une bijection de $(0,L)$ sur $(0,\Lambda)$, alors $T_k(v) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k \in (0,\Lambda)$. Si $\Lambda = \infty$, on peut donc définir le gradient de v, avec $\nabla v = e^{\gamma(u)/(p-1)}\nabla u$, d'après la définition 2.2.5 et (3.3.5). Dans le cas $\Lambda < \infty$, on a imédiatement $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ car dans ce cas Ψ est borné.
Cherchons maintenant l'équation vérifiée par $T_k(v)$. Soit $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, et $\psi = e^{\gamma(T_K(u))}\varphi$; on a $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= (e^{\gamma(T_K(u))}\gamma'(T_K(u))\varphi)\nabla T_K(u) + e^{\gamma(T_K(u))}\nabla\varphi \\ &= (e^{\gamma(T_K(u))}\beta(T_K(u))\varphi)\nabla T_K(u) + e^{\gamma(T_K(u))}\nabla\varphi\end{aligned}$$

Considerons ψ comme fonction test dans (3.3.4), on obtient

$$\int_\Omega e^{\gamma(T_K(u))}\left|\nabla T_K(u)\right|^{p-2}\nabla T_K(u).\nabla\varphi\,dx+\int_\Omega e^{\gamma(T_K(u))}(\beta(T_K(u))\left|\nabla T_K(u)\right|^p\varphi\,dx$$
$$=\int_\Omega e^{\gamma(T_K(u))}(\beta(T_K(u))\left|\nabla T_K(u)\right|^p\varphi\,dx+\int_{\{u<K\}}\lambda f\psi dx+\int_\Omega\psi d\alpha_K$$

Donc, en tenant compte la relation (3.3.5), on obtient

$$\int_\Omega\left|\nabla T_k(v)\right|^{p-2}\nabla T_k(v).\nabla\varphi\,dx=\int_{\{U<K\}}\lambda f e^{\gamma(T_K(u))}\varphi\,dx+\int_\Omega e^{\gamma(T_K(u))}\varphi\,d\alpha_K$$

Puisque $\{u=K\}=\{v=k\}$ et α_K est concentrée sur $\{u=K\}$, en utilisant la définition (3.2.1) de g, on a donc

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left|\nabla T_k(v)\right|^{p-2}\nabla T_k(v).\nabla\varphi\,dx=\\
&\int_{\{U<K\}}\lambda f\,e^{\gamma(T_K(u))}\varphi\,dx+\int_{\Omega\cap\{u=K\}}e^{\gamma(T_K(u))}\varphi\,d\alpha_K\\
&=\int_{\{v<k\}}\lambda f(1+g(v))^{p-1}\varphi\,dx+\int_{\Omega\cap\{u=K\}}e^{\gamma(K)}\varphi\,d\alpha_K\\
&=\int_{\{v<k\}}\lambda f(1+g(v))^{p-1}\varphi\,dx+\int_\Omega\varphi\,(1+g(k))^{p-1}\,d\alpha_K\\
&=\int_{\{v<k\}}\lambda f(1+g(v))^{p-1}\varphi dx+\int_\Omega\varphi\,d\mu_k
\end{aligned}$$

où $\mu_k=e^{\gamma(K)}\alpha_K=(1+g(k))^{p-1}\alpha_K$. D'où on obtient l'équation (3.3.3) vérifiée par la troncature $T_k(v)$.
Il nous reste à démontrer la partie (iii), pour cela on distingue les deux cas $L=+\infty$ et $L<+\infty$:

Cas 1 : $L=+\infty$. On obtient immédiatement la convergence de α_K vers α_s pour la topologie étroite des mesures lorsque $K\nearrow+\infty=L$.

Cas 2 : $L<+\infty$. D'après la remarque 2.2.10, on a $\alpha_s=0$, et $u=T_L(u)\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. De plus $T_K(u)$ converge fortement vers u dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque $K\nearrow L$. . Considerons $\psi=T_K(u)$ dans (3.3.4), on obtient

$$\int_\Omega\left|\nabla T_K(u)\right|^p dx=\int_\Omega\beta(T_K(u))\left|\nabla T_K(u)\right|^p dx+\int_{\{u<K\}}\lambda f\,T_K(u)dx+K\alpha_K(\Omega)$$

D'autre part, la suite $\beta(T_K(u))\left|\nabla\,T_K(u)\right|^p=\beta(u)\left|\nabla\,T_K(u)\right|^p$ croit si K croit vers L et converge presque partout vers $\beta(u)\left|\nabla\,u\right|^p\in L^1(\Omega)$, d'où par le théorème de convergence dominée on obtient la convergence forte dans $L^1(\Omega)$ de $\beta(T_K(u))\left|\nabla\,T_K(u)\right|^p$ vers

$\beta(u)\,|\nabla u|^p$ lorsque $K \nearrow L$. De plus, on a $\lambda f \chi_{\{u<K\}}$ converge vers λf fortement dans $L^1(\Omega)$ lorsque $K \nearrow L$, puisque $f \in L^1(\Omega)$ et $u < L$ presque partout dans Ω.
Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{K\nearrow L} K\alpha_K(\Omega) = \\
&\lim_{K\nearrow L} \Big(\int_\Omega |\nabla T_K(u)|^p\,dx - \int_\Omega \beta(T_K(u))\,|\nabla T_K(u)|^p\,dx - \int_{\{u<K\}} \lambda f\, T_K(u)dx\Big) \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega \beta(u)\,|\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega \lambda f u dx = 0,
\end{aligned}$$

donc α_K converge vers 0 pour la topologie étroite des mesures lorsque $K \nearrow L$. Donc, dans les deux cas où L est finie ou non, α_K converge vers α_s pour la topologie étroite des mesures lorsque $K \nearrow L$.

Preuve du lemme 3.3.5 : Supposons que v est une solution de (3.1.11). Pour tout $k > 0$, on considère la fonction tronquée $T_k(v) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
D'après la défintion 2.2.11, il existe $\mu_k \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$, concentrée sur l'ensemble $\{v = k\}$, qui converge étroitement vers μ_s lorsque $k \to +\infty$, telle que $T_k(v)$ satisfait l'équation (3.3.3), c'est à dire

$$\int_\Omega |\nabla T_k(v)|^{p-2}\,\nabla T_k(v).\nabla\varphi\,dx = \lambda \int_{\{v<k\}} f(1+g(v))^{p-1}\varphi\,dx + \int_\Omega \varphi\,d\mu_k \tag{3.3.6}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.
Maintenant, on considère le changement de fonction $u = H(v)$, on a $0 \le u < L$. Pour $k \in (0, \Lambda)$, soit $K = H(k)$. Alors $T_K(u) = H(T_k(v))$, et par la règle des fonctions composées on obtient

$$\begin{aligned}
\nabla T_K(u) = H'(T_k(v)\nabla T_k(v) &= (1+g(T_k(v))^{-1}\nabla T_k(v) \\
&= (1+g(v))^{-1}\nabla T_k(v)
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

D'où, voir la définition 2.2.5, on peut définir le gradient de u par

$$\nabla u = (1+g(v))^{-1}\nabla v$$

Cherchons maintenant l'équation satisfaite par $T_K(u)$. Soit $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, et $\varphi = (1+g(T_k(v))^{1-p}\psi$; on a $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec

$$\nabla\varphi = (1-p)(1+g(T_k(v)))^{-p} g'(T_k(v))\psi)\nabla T_k(v) + (1+g(T_k(v))^{1-p}\nabla\psi$$

Considerons φ comme fonction test dans (3.3.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (1+g(T_k(v))^{1-p}\,|\nabla T_k(v)|^{p-2}\,\nabla T_k(v).\nabla\psi\,dx = \\
&\int_\Omega (p-1)g'(T_k(v))(1+g(T_k(v)))^{-p}\,|\nabla T_k(v)|^p\,\psi\,dx \\
&+ \lambda \int_{\{v<k\}} f(1+g(v))^{p-1}(1+g(T_k(v))^{1-p}\psi\,dx + \int_\Omega (1+g(T_k(v))^{1-p}\psi\,d\mu_k
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.3.7), la définition (3.2.2) de β, et que $T_k(v) = v$ sur $\{v = k\} = \{u = K\}$, on déduit

$$\int_\Omega |\nabla T_K(u)|^{p-2} \nabla T_K(u).\nabla\psi \, dx = \int_\Omega \beta(T_K(u)) \, |\nabla T_K(u)|^p \, \psi \, dx$$
$$+ \lambda \int_{\{U<k\}} f\psi \, dx + \int_\Omega (1 + g(T_k(v)))^{1-p}\psi \, d\mu_k,$$

or μ_k est concentrée sur l'ensemble $\{v = k\}$, donc

$$\int_\Omega (1 + g(T_k(v)))^{1-p}\psi \, d\mu_k = \int_{\Omega\cap\{v=k\}} (1 + g(T_k(v)))^{1-p}\psi \, d\mu_k$$
$$= \int_{\Omega\cap\{v=k\}} (1 + g(k)^{1-p}\psi \, d\mu_k = \int_\Omega \psi \, d\alpha_K$$

où α_K est donnée par la relation (3.3.1). Par conséquent, on obtient l'équation (3.3.2) satsfaite par $T_K(u)$.
Pour montrer la partie (iii), on distingue les deux cas $\Lambda = +\infty$ et $\Lambda < +\infty$. Si $\Lambda = +\infty$, alors la convergence est immédiate. Si $\Lambda < \infty$, alors $\mu_s = 0$, et $v = T_\Lambda(v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, . De plus $T_k(v)$ converge fortement vers v dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque $k \nearrow \Lambda$. Considerons $\varphi = T_k(v)$, dans (3.3.6), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(v)|^p \, dx = \int_\Omega \lambda f(1 + g(v))^{p-1} v\chi_{\{v<k\}} dx + k\mu_k(\Omega)$$

D'autre part, par le théorème de convergence monotone, $f(1 + g(v))^{p-1}v\chi_{\{v<k\}}$ converge fortement dans $L^1(\Omega)$ vers $f(1+g(v))^{p-1}v \in L^1(\Omega)$ lorsque $k \nearrow \Lambda$, puisque $v < \Lambda$ presque partout dans Ω. Alors

$$\lim_{k\nearrow\Lambda} k\mu_k(\Omega) = \lim_{k\nearrow\Lambda}\Big(\int_\Omega |\nabla T_k(v)|^p \, dx - \int_\Omega \lambda f(1 + g(v))^{p-1} v\chi_{\{v<k\}} dx\Big)$$
$$= \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx - \int_\Omega \lambda f(1 + g(v))^{p-1} v dx = 0,$$

donc μ_k converge étroitement vers 0 dans $\mathcal{M}_b(\Omega)$ lorsque $k \nearrow \Lambda$. D'ici, dans les deux cas où Λ est fini ou infini, on a μ_k converge vers μ_s pour la topologie étroite de $\mathcal{M}_b(\Omega)$ lorsque $k \nearrow \Lambda$. ■

Après avoir démontré les lemmes 3.3.3, 3.3.4 et 3.3.5, on va les utiliser pour démontrer le résultat principal de ce chapitre : les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2.

(UV) Preuve du théorème 3.1.1. Soit u une solution renormalisée du problème (3.1.10). Soit $g = T(\beta)$ et $v = \Psi(u)$, donc $0 \leq v(x) < \Lambda$ presque partout dans Ω. Reprenons toutes les notations du lemme 3.3.4.

Soit $\psi = e^{\gamma(T_K(u))} - 1 = (1 + g(T_k(v))^{p-1} - 1$. On a $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec

$$\begin{aligned}\nabla\psi &= \gamma'(T_K(u))e^{\gamma(T_K(u))}\nabla T_K(u)\\ &= \beta(T_K(u))e^{\gamma(T_K(u))}\nabla T_K(u)\end{aligned}$$

Considerons ψ comme fonction test dans l'équation (3.3.2) satisfaite par la tronquée $T_K(u)$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \beta(T_K(u))\,|\nabla T_K(u)|^p\, e^{\gamma(T_K(u))}dx =\\ &\int_{\{u<K\}} \beta(u)\,|\nabla\, u|^p\,\psi\, dx + \int_{\{u<K\}} \lambda f\psi dx + \int_\Omega \psi d\alpha_K\\ &= \int_\Omega \beta(T_K(u))\,|\nabla T_K(u)|^p\,(e^{\gamma(T_K(u))} - 1)\, dx + \int_{\{u<K\}} \lambda f\psi dx + \int_\Omega \psi d\alpha_K\end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega \beta(T_K(u))\,|\nabla T_K(u)|^p\; dx = \int_{\{u<K\}} \lambda f\psi dx + \int_\Omega \psi d\alpha_K$$

par suite, en utilisant l'expression de ψ et le fait que α_K est concentrée sur $\{u = K\} = \{v = k\}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \beta(T_K(u))\,|\nabla T_K(u)|^p\, dx &= \int_{\{u<K\}} \lambda f\psi dx + \int_\Omega \psi d\alpha_K\\ &= \int_{\{v<k\}} \lambda f((1 + g(v))^{p-1} - 1)dx + ((1 + g(k))^{p-1} - 1)\int_\Omega d\alpha_K\\ &= \int_{\{v<k\}} \lambda f((1 + g(v))^{p-1} - 1)dx + \mu_k(\Omega) - \alpha_K(\Omega).\end{aligned}$$

par conséquent $\lambda\int_{\{v<k\}} f((1 + g(v))^{p-1}dx\; +\; \mu_k(\Omega)$ est égal à

$$\int_\Omega \beta(T_K(u))\,|\nabla T_K(u)|^p\, dx + \lambda\int_{\{v<k\}} f\, dx + \alpha_K(\Omega) \tag{3.3.8}$$

Puisque $\beta(u)\,|\nabla u|^p \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$ et α_K converge étroitement, on déduit que la quantité (3.3.8) est uniformement bornée par rapport à K. Donc, il existe $M > 0$ indépendante de k telle que :

$$\lambda\int_{\{v<k\}} f((1 + g(v))^{p-1}dx\; +\; \mu_k(\Omega) \leq\; M \tag{3.3.9}$$

Il en résulte que $\Phi = f(1 + g(v))^{p-1} \in L^1(\Omega)$, par le lemme de Fatou, et que la suite des mesures μ_k est uniformement bornée par rapport à k dans $\mathcal{M}_b(\Omega)$. Alors il existe une suite (k_n) qui converge vers Λ telle que (μ_{k_n}) converge vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$ pour

la topologie faible * de $\mathcal{M}_b(\Omega)$.
Maintenant, soit $v_n = T_{k_n}(v)$, alors (v_n) converge vers $v = \Psi(u)$ presque partout dans Ω. De plus, v_n est solution de l'équation (3.3.3) pour $k = k_n$. Donc v_n est solution de l'équation :

$$-\Delta_p v_n = \eta_n \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

avec $\eta_n = f(1+g(v))^{p-1}\chi_{\{v<k_n\}} + \mu_{k_n} \geq 0$. D'après (3.3.9) on a $\eta_n(\Omega) \leq M$. Par suite, voir remarque 2.2.13, nous obtenons à une sous-suite près :

$$v_n \to v \text{ presque partout dans } \Omega,$$

$$\nabla v_n \to \nabla v \text{ presque partout dans } \Omega,$$

$$|\nabla v_n|^{p-1} \text{ est bornée dans } L^\tau(\Omega) \text{ pour tout } \tau < \frac{N}{N-1},$$

$$|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \to |\nabla v|^{p-2}\nabla v \text{ fortement dans } L^\tau(\Omega) \text{ pour tout } \tau < \frac{N}{N-1}.$$

Alors v satisfait l'équation

$$-\Delta_p v = \Phi + \mu \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega); \tag{3.3.10}$$

donc μ est uniquement determiné, et μ_k converge pour la topologie faible * de $\mathcal{M}_b(\Omega)$ vers μ lorsque $k \nearrow \Lambda$. Alors v est une solution **atteignable** de l'équation (3.3.10) . Posons $M = \Phi + \mu$.

Premier cas : $p = 2$ **ou** $p = N$. Alors, par unicité de solution, on sait que v est une solution renormalisée de l'équation (3.3.10). Il existe $m \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$ et $\eta_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ telles que $M = m + \eta_s$, et d'après la definition d'une solution renormalisée , pour tout $k > 0$, il existe $\eta_k \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$ concentrée sur l'ensemble $\{v = k\}$, qui converge vers η_s pour la topologie étroite des mesures, et

$$-\Delta_p T_k(v) = m\llcorner_{\{v<k\}} + \eta_k \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

mais on a aussi

$$-\Delta_p T_{k_n}(v) = \Phi_{k_n} + \mu_{k_n} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

avec $\Phi_{k_n} = \lambda f(1+g(v))^{p-1}\chi_{\{v<k_n\}}$. Donc on obtient

$$\Phi_{k_n} - m\llcorner_{\{v<k_n\}} = \eta_{k_n} - \mu_{k_n},$$

et puisque le premier membre de l'égalité $\Phi_{k_n} - m\llcorner_{\{v<k_n\}}$ est concentré sur l'ensemble $\{v < k_n\}$ et le second $\eta_{k_n} - \mu_{k_n}$ est concentré sur l'ensemble $\{v = k_n\}$, alors tous les deux sont nulles, par suite $\Phi_{k_n} = m\llcorner_{\{v<k_n\}}$ et $\eta_{k_n} = \mu_{k_n}$. Il en résulte que $\eta_{k_n} = \mu_{k_n}$, et $\mu = \eta_s$, et

$$-\Delta_p v = f(1+g(v))^{p-1} + \eta_s \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega);$$

donc au sens de solution renormalisée ; avec μ_k converge vers η_s pour la topologie étroite des mesures et $\mu = \eta_s$ est singulière.

Cas géneral. Si $\Lambda < +\infty$ alors $L < \infty$, $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, et $\mu = \alpha = 0$, et u, v sont des solutions variationnelles de $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$.
Montrons les résultats dans le cas $\Lambda = +\infty$. D'après [3], il existe $m \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ et $\eta \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$ telles que $M = m + \eta$, et il existe une suite (k_n) qui tend vers ∞, telle que il existe une mesure $M_{k_n} \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap \mathcal{M}_b(\Omega)$ telle que $-\Delta_p T_{k_n}(v) = M_{k_n}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et

$$\eta_{k_n} = M_{k_n} \llcorner_{\{v=k_n\}} \in \mathcal{M}_0^+(\Omega) \quad \text{ et } \quad M_{k_n} = m \llcorner_{\{v<k_n\}} + \eta_{k_n},$$

et (η_{k_n}) converge faiblement * vers M; et pour tout $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ telle que h' a un support compact, et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v.\nabla(h(v)\varphi)dx = \int_\Omega h(v)\varphi dm + h(\infty) \int_\Omega \varphi d\eta. \tag{3.3.11}$$

Mais

$$M_{k_n} = m \llcorner_{\{v<k_n\}} + \eta_{k_n} = \Phi\chi_{\{v<k_n\}} + \mu_{k_n},$$

d'où $\eta_{k_n} = \mu_{k_n}$ et $m \llcorner_{\{v<k_n\}} = \Phi\chi_{\{v<k_n\}}$, et $\{v = \infty\}$ est de capacité 0, donc $m = \Phi$, et $\mu = \eta$, donc (3.1.12) est satisfaite.

De plus, si $\beta \in L^1((0, L))$, alors $\mu = e^{\gamma(L)}\alpha_s$ d'après (ii) du lemme 3.3.3, donc μ est singulière ; et μ_k converge pour la topologie étroite des mesures , donc v est une solution renormalisée de (3.1.11). Si $L = \infty$ et $\beta \notin L^1((0, \infty))$, alors d'après (3.2.7) et la remarque 3.2.5, cela est équivalent à $\lim\limits_{v \longrightarrow \Lambda} g(v) = \infty$, d'où $\alpha_s = 0$ par (i) du lemme 3.3.3. ■

(VU) Preuve du théorème 3.1.2. Soit v une solution renormalisée de (3.1.11), où $0 \leq v(x) < \Lambda$ presque partout dans Ω. Soit $\beta = T^{-1}(g)$ et $u = H(v)$ donc $0 \leq u < L$ presque partout dans Ω.
Soit $\phi(s) = 1 - \dfrac{1}{(1 + g(s))^{p-1}}$. La fonction $\varphi_k = \phi(T_k(v))$ est une fonction admissible dans (3.1.11), donc on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\{u<K\}} \beta(u) |\nabla u|^p dx &= (p-1) \int_{\{v<k\}} \frac{g'(v) |\nabla v)|^p}{(1 + g(v))^p} dx \\
&= \lambda \int_{\{v<k\}} f(1 + g(v))^{p-1} \varphi_k dx + \phi(k) \int_\Omega d\mu_k \\
&\leq \lambda \int_\Omega f(1 + g(v))^{p-1} dx + \int_\Omega d\mu_k \leq C
\end{aligned}$$

où $C > 0$ est indépendante de k; alors $\beta(u) |\nabla u|^p \in L^1(\Omega)$.
D'après (i) du lemme 3.3.3, on a α_K converge étroitement vers un $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$. Puisque

$T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, elle est encore une solution renormalisée de l'équation (3.3.2). D'après [4, Theorem 3.4] il existe une sous-suite convergente vers une solution renormalisée U de

$$-\Delta_p U = \beta(u)\,|\nabla\, u|^p + \lambda f + \alpha_s$$

et $T_k(u)$ converge presque partout dans Ω vers u, donc (le représentent quasicontinu de) U est égal à u. ■

Terminons cette section par quelques remarques, où nous commentons les résultats des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 :

Remarque 3.3.6 *Sous les hypothèses du théorème 3.1.1, on a*

1. *Si* $\beta \in L^1((0,L))$*, ce qui est équivalent à* g *est bornée d'après (3.2.7) ; alors* $\mu = e^{\gamma(L)}\alpha_s$ *est singulière et si de plus* $L < \infty$*, donc* $\alpha_s = 0$*, alors* $\mu = 0$*.*
2. *Si* $\beta \notin L^1((0,L))$*,ce qui est équivalent à* g *non bornée d'après (3.2.7) ; alors* $\alpha_s = 0$*, mais on ne sait rien sur* μ*. Donc, le problème (3.1.10) n'a pas de solution renormalisée pour* $\alpha_s \neq 0$*.*

Remarque 3.3.7 *Sous les hypothèses du théorème 3.1.2, on a*

1. *Si* $\Lambda < \infty$*, ce qui implique* $L < \infty$*, alors* $\alpha_s = \mu_s = 0$*.*
2. *Si* $\Lambda = \infty$ *et* g *est bornée, ce qui est équivalent à* $\beta \in L^1((0,\infty))$ *d'après (3.2.7), alors* $\alpha_s = e^{-\gamma(\infty)}\mu_s$

3.4 Le cas β constant, g linéaire

Dans cette dernière section de ce chapitre nous montrons les résultats du théorème 3.4.1, concernant les deux problèmes (3.1.7) et (3.1.8), où $f \not\equiv 0$, et $\beta(u) \equiv p-1$, et $g(v) = v$ sa fonction correspondante :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = (p-1)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x) & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(1+v)^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

D'abord, notons quelques propriétés de la première valeur propre $\lambda_1(f)$ définie par (3.1.14) :

3.4.1 Quelques propriétés de $\lambda_1(f)$

(i) Soit $f \in L^1(\Omega)$, $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$, telle que

$$\lambda_1(f) > 0.$$

Soit $C > 0$. Alors pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a

$$f(C + |v|)^{p-1} \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^1(\Omega),$$

en particulier $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $h(r) = (C + r)^p - (1 + \varepsilon)r^p$ admet un maximum sur $[0, \infty)$, donc il existe $M_\epsilon = M(\varepsilon, p, C) > 0$ telle que

$$(C + r)^p \leq (1 + \varepsilon)r^p + M_\epsilon \qquad \text{pour tout } r \geq 0,$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_\varepsilon = K(\varepsilon, p, C) > 0$ telle que pour tout $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\int_\Omega f(C + |v|)^p dx \leq (1 + \varepsilon) \int_\Omega f\, |v|^p\, dx + M_\varepsilon\, |\Omega| \leq \frac{1 + \varepsilon}{\lambda_1(f)} \|\nabla v\|^p_{L^p(\Omega)} + M_\varepsilon\, |\Omega| \tag{3.4.3}$$

donc en utilisant (3.4.3, puis l'inégalité $(x + y)^\theta \leq x^\theta + y^\theta$ pour tout $x, y \geq 0$ et $0 \leq \theta \leq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(C + |v|)^{p-1}\, |w|\, dx &\leq \left(\int_\Omega f(C + |v|)^p dx\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega f\, |w|^p\, dx\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{1}{\lambda_1(f)^{1/p}} \left(\int_\Omega f(C + |v|)^p dx\right)^{1/p'} \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)} \\
&\leq \Big(\frac{(1 + \varepsilon)^{1/p'}}{\lambda_1(f)^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}}} \|\nabla v\|^{p/p'}_{L^p(\Omega)} + K_\varepsilon\Big) \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)} \\
&= \Big(\frac{1 + \varepsilon^{1/p'}}{\lambda_1(f)} \|\nabla v\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + K_\varepsilon\Big) \|\nabla w\|_{L^p(\Omega)}
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

où $K_\varepsilon = (M_\varepsilon\, |\Omega|)^{1/p'} / \lambda_1(f)^{1/p}$. Donc $f(C + |v|)^{p-1} \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, en particulier $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, et avec des nouveaux ε et K_ε,

$$\left\| f(C + |v|)^{p-1} \right\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \frac{1 + \varepsilon}{\lambda_1(f)} \|\nabla v\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + K_\varepsilon. \tag{3.4.5}$$

(ii) Si $f \in L^r(\Omega)$, avec $r \geq N/p$, alors $\lambda_1(f) > 0$, et $\lambda_1(f)$ est atteinte par une certaine première fonction propre $\phi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (3.1.13), d'après [6]. Si $r > N/p$, alors $\phi_1 \in L^\infty(\Omega)$, d'après la proposition 2.3.4, et ϕ_1 est localement Hölder continue, d'après [2]. Si $r = N/p$, alors $\phi_1 \in L^k(\Omega)$ pour tout $k \geq 1$.

(iii) Si $0 \in \Omega$ et $f(x) = 1/\, |x|^p$, alors $f \notin L^{N/p}(\Omega)$, mais $\lambda_1(f) > 0$ d'après l'inégalité de Hardy, donnée par $\lambda_1(f) = ((N - p)/p)^p$ et $\lambda_1(f)$ n'est pas atteinte.

3.4.2 Preuve du Théorème 3.1.3

Les résultats du théorème 3.1.3 sont ceux que nous avons énoncé dans le chapitre d'introduction par les théorèmes 2.2, 2.4 et 2.6 et les corollaires 2.3, 2.5 et 2.7.

Nous commençons par démontrer le résultat d'existence, d'unicité et de régularité du théorème 2.2 :

Théorème 3.4.1 *Si* $0 < \lambda < \lambda_1(f)$ *alors le problème (3.4.2) admet une solution positive unique* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Si de plus* f *satisfait* $f \in L^r(\Omega), r > N/p$, *alors* $v \in L^\infty(\Omega)$. *Si* $f \in L^{N/p}(\Omega)$, *alors* $v \in L^k(\Omega)$ *pour tout* $k > 1$.

Preuve. Existence et Régularité : Supposons $0 < \lambda < \lambda_1(f)$. Alors $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ d'après (i) de la sous section 3.4.1, donc $v_1 = \mathcal{G}(\lambda f) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $v_1 \geq 0$, d'après la remarque 2.2.20 . On a $f(1+v_1)^{p-1} \in W^{-1,p'}(\Omega)$, d'après (i) de la sous section 3.4.1. Par un processus d'itération nous définissons $v_n = \mathcal{G}(\lambda f(v_{n-1}+1)^{p-1} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$-\Delta_p v_n = \lambda f(v_{n-1}+1)^{p-1} \qquad \text{dans } W^{-1,p'}(\Omega). \tag{3.4.6}$$

D'après la remarque 2.2.20, on déduit que la suite v_n est croissante.
Considerons v_n comme fonction test dans (3.4.6), alors d'après (3.4.3) il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ in dépendante de n telle que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v_n|^p\,dx &= \lambda \int_\Omega f(v_{n-1}+1)^{p-1} v_n dx \\ &\leq \lambda \int_\Omega f(v_n+1)^p dx \\ &\leq \frac{\lambda(1+\varepsilon)}{\lambda_1(f)} \int_\Omega |\nabla v_n|^p\,dx + \lambda C(\epsilon).\end{aligned}$$

et alors

$$(1 - \frac{\lambda(1+\epsilon)}{\lambda_1(f)}) \int_\Omega |\nabla\, v_n|^p\ dx \leq \lambda\, C(\epsilon).$$

Choisissons ϵ telle que $0 < \epsilon < \dfrac{\lambda_1(f)-\lambda}{\lambda}$, par suite $1 - \dfrac{\lambda(1+\epsilon)}{\lambda_1(f)} > 0$, alors on conclut que (v_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. La suite v_n est décroissante, donc elle converge faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et presque partout dans Ω vers $v = \sup v_n$.
Maintemant, pour tout $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\left|f(v_{n-1}+1)^{p-1} w\right| \leq\ f(1+v)^{p-1}\,|\,w| = h,$$

et nous avons $h \in L^1(\Omega)$ d'après (3.4.4), donc

$$f(v_{n-1}+1)^{p-1} \rightharpoonup\ f(1+v)^{p-1} \text{ faiblement dans } W^{-1,p'}(\Omega).$$

Mais, d'après [8], l'opérateur $(-\Delta_p)^{-1}$ est compact de $W^{-1,p'}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q < pN/(N-p)$. Donc il existe une sous suite de v_n qui converge fortement dans $L^q(\Omega)$ for any q, $1 \leq q < pN/(N-p)$ et presque partout dans Ω vers $w = (-\Delta_p)^{-1}(\lambda f(v+1)^{p-1}) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Mais la suite v_n converge vers v presque partout dans Ω, alors $v = w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et donc v est une solution de

$$-\Delta_p v = \lambda f(v+1)^{p-1} \qquad \text{in } W^{-1,p'}(\Omega).$$

La régularité est obtenue par la proposition 2.3.4.

Unicité : L'unicité est basée sur le lemme du type Picone 2.2.21. Nous nous inspirons de l'inégalité de Diaz-Saa, voir [5], en notant que la difficulté dans notre situation est que le second membre n'est pas borné et par suite une solution n'est pas assez régulière, même elle n'est pas nécessairement bornée.
Soient $v, \bar{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ deux solutions positives de (3.4.2). Notons que 0 n'est pas solution du problème (3.4.2), donc toute solution de (3.4.2) est non identiquement nulle, donc par le principe du maximum fort on a $v, \bar{v} > 0$.
D'après le lemme 2.2.21 appliqué pour $U = v$ et $V = \bar{v}$, nous déduisons que $v^p(-\Delta_p \bar{v})/\bar{v}^{p-1}$ avec

$$\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx \geq \int_\Omega v^p(-\Delta_p \bar{v})/\bar{v}^{p-1} dx,$$

D'autre part, puisque $-\Delta_p v \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ et $(-\Delta_p v)v \geq 0$, nous obtenons $\displaystyle\int_\Omega (-\Delta_p v) v dx = \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx$, voir la remarque (2.2.2). Par conséquent

$$\begin{aligned} I = \int_\Omega \Big(\frac{-\Delta_p v}{v^{p-1}} + \frac{\Delta_p \bar{v}}{\bar{v}^{p-1}}\Big) v^p dx &= \int_\Omega (-\Delta_p v) v \, dx + \int_\Omega \frac{\Delta_p \bar{v}}{\bar{v}^{p-1}} v^p dx \\ &= \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx + \int_\Omega v^p (\Delta_p \bar{v})/\bar{v}^{p-1} dx \geq 0; \end{aligned}$$

et par symétrie $J = \displaystyle\int_\Omega \Big(\frac{-\Delta_p \bar{v}}{\bar{v}^{p-1}} + \frac{\Delta_p v}{v^{p-1}}\Big) \bar{v}^p dx \geq 0$. Donc

$$I + J = \int_\Omega \Big(\frac{-\Delta_p v}{v^{p-1}} + \frac{\Delta_p \bar{v}}{\bar{v}^{p-1}}\Big)(v^p - \bar{v}^p) dx \geq 0.$$

D'autre part

$$I + J = \lambda \int_\Omega \left(f((1 + \frac{1}{v})^{p-1} - (1 + \frac{1}{\bar{v}})^{p-1}) \right) (v^p - \bar{v}^p) dx \leq 0$$

donc $I+J=0$. Par conséquent $v=\bar{v}$ sur $\{f>0\}$. De plus $I=J=0$, car $I,J\geq 0$. Donc

$$\begin{aligned}
I &= \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx + \int_\Omega v^p(\lambda\, f(1+\bar{v})^{p-1})/\bar{v}^{p-1}dx \\
&= \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \int_{\{f>0\}} v(\lambda\, f(1+\bar{v})^{p-1})dx \\
&= \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx + \int_\Omega v(\Delta_p\bar{v})dx \\
&= \int_\Omega |\nabla v|^p\,dx - \int_\Omega |\nabla\bar{v}|^{p-2}\,\nabla\bar{v}\cdot\nabla v\,dx \\
&= \int_\Omega (|\nabla v|^{p-2}\,\nabla v - |\nabla\bar{v}|^{p-2}\,\nabla\bar{v})\cdot\nabla v\,dx.
\end{aligned}$$

De même $J=\displaystyle\int_\Omega (|\nabla\bar{v}|^{p-2}\,\nabla\bar{v} - |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v)\cdot\nabla\bar{v}\,dx$. Donc

$$I+J=\int_\Omega (|\nabla v|^{p-2}\,\nabla v - |\nabla\bar{v}|^{p-2}\,\nabla\bar{v})\cdot(\nabla v-\nabla\bar{v})dx=0.$$

Il en résulte que $v=\bar{v}$, voir [8, Lemme A.0.5]. ∎

Par le théorème 3.4.1 nous obtenons le résultat suivant

Corollaire 3.4.2 *Si* $0<\lambda<\lambda_1(f)$ *alors il existe une* ***unique*** *solution* $u_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$ *de (3.4.1) telle que* $e^{u_0}-1\in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Si* $f\in L^{N/p}(\Omega)$, *alors* $u_0\in L^k(\Omega)$ *pour tout* $k>1$. *Si* $f\in L^r(\Omega), r>N/p$, *alors* $u_0\in L^\infty(\Omega)$.

Preuve. Toute solution renormalisée u de (3.4.1) satisfait $(p-1)\,|\nabla u|^p\in L^1(\Omega)$, donc $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$. Si $\lambda<\lambda_1(f)$, il existe une solution unique $v_0\in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.4.2) par le théorème 3.4.1. Alors par le théorème 3.1.2, $u_0=H(v_0)$ est une solution renormalisée de (3.4.1) telle que $v_0=\Psi(u_0)=e^{u_0}-1\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Réciproquement, si u est une solution renormalisée de (3.4.1), telle que $v=\Psi(u)\in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors par le théorème 3.1.1, il existe une mesure $\mu\in\mathcal{M}_b^+(\Omega)$ telle que v est une solution atteignable de

$$-\Delta_p v=\lambda f(1+v)^{p-1}+\mu.$$

Puisque $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, alors $F=\lambda f(1+v)^{p-1}+\mu\in W^{-1,p'}(\Omega)$ et donc

$$\mu=F-\lambda f(1+v)^{p-1}\in W^{-1,p'}(\Omega)+L^1(\Omega)=\mathcal{M}_0(\Omega).$$

Alors par l'existence et l'unicité des solutions de (2.2.2) lorsque $\mu\in\mathcal{M}_0(\Omega)$, v est encore une solution renormalisée. Comme dans la démonstration du théorème 3.1.1 dans le cas $p=2$ ou N, on déduit que $\mu\in\mathcal{M}_s^+(\Omega)$. Donc $\mu\in\mathcal{M}_0(\Omega)\cap\mathcal{M}_s^+(\Omega)=\{0\}$, donc $\mu=0$ et $v=v_0$, alors $u=u_0$.
La régularité résulte du fait que $u_0\leq v_0$. ∎

Maintenant nous montrons le résultat de non-existence du théorème 2.4 :

Théorème 3.4.3 *Si $\lambda > \lambda_1(f) \geq 0$, ou $\lambda = \lambda_1(f) > 0$ et $f \in L^{N/p}(\Omega)$, alors le problème (3.4.1) n'admet aucune solution renormalisée.*

Preuve. Supposons que u est une solution renormalisée du problème (3.4.1). D'après la remarque 3.3.1, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(i) Soit $\psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, avec $\psi \geq 0$. Prenons $\varphi = \psi^p$ comme fonction test dans le problème en u, nous obtenons

$$\begin{aligned}(p-1)\int_\Omega |\nabla u|^p \psi^p dx + \lambda \int_\Omega f\psi^p dx &= p\int_\Omega \psi^{p-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla \psi dx \\ &\leq p\int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla \psi| \psi^{p-1} dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla \psi|^p dx + (p-1)\int_\Omega |\nabla u|^p \psi^p dx;\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Young $a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$, où $p' = p/(p-1)$; appliquée pour $a = |\nabla u|^{p-1} \psi^{p-1}$ et $b = |\nabla \psi|$. D'où

$$\lambda \int_\Omega f\psi^p dx \leq \int_\Omega |\nabla \psi|^p dx;$$

par densité nous montrons que $\lambda \leq \lambda_1(f)$. En particulier si $\lambda_1(f) = 0$ alors il n'existe pas de solution pour tout $\lambda > 0$.

(ii) Supposons que $f \in L^{N/p}(\Omega)$ et $\lambda = \lambda_1(f) > 0$. On sait que $\lambda_1(f)$ est atteinte par une certaine première fonction propre $\phi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ (voir (ii) de la sous section 3.4.1). Considérons ϕ_1, on a

$$\int_\Omega |\nabla \phi_1|^p dx = \lambda_1(f)\int_\Omega f\phi_1^p dx. \tag{3.4.7}$$

Considérons une suite de fonctions positives $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ convergente vers ϕ_1 fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Prenons $\psi_n^p \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ comme fonction test dans le problème en u, on trouve

$$(p-1)\int_\Omega |\nabla u|^p \psi_n^p dx + \lambda_1(f)\int_\Omega f\psi_n^{p-1} dx = p\int_\Omega \psi_n^{p-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla \psi_n dx. \tag{3.4.8}$$

Pour toute fonction $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, nous posons

$$L(u,\phi) := (p-1)|\nabla u|^p \phi^p + |\nabla \phi|^p - p\phi^{p-1} |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla \phi,$$

$$L_1(u,\phi) := (p-1)|\nabla u|^p \phi^p + |\nabla \phi|^p - p\phi^{p-1} |\nabla u|^{p-1} |\nabla \phi|,$$

presque pour tout $x \in \omega$. Donc $0 \leq L_1(u,\phi) \leq L(u,\phi)$. D'après (3.4.8),

$$\int_\Omega L_1(u,\psi_n)dx + \lambda_1(f)\int_\Omega f\psi_n^p dx \leq \int_\Omega L(u,\psi_n)dx + \lambda_1(f)\int_\Omega f\psi_n^p dx = \int_\Omega |\nabla \psi_n|^p dx;$$

En utilisant la convergence forte de $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ vers ϕ_1 dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous suite qui converge presque partout dans Ω puis utiliser le lemme de Fatou pour conclure l'inégalité

$$\int_\Omega L_1(u,\phi_1)dx + \lambda_1(f)\int_\Omega f\phi_1^p dx \leq \int_\Omega L(u,\phi_1)dx + \lambda_1(f)\int_\Omega f\phi_1^p dx = \int_\Omega |\nabla\phi_1|^p\,dx,$$

par suite, en utilisant (3.4.7), nous obtenons $L_1(u,\phi_1) = L(u,\phi_1) = 0$ presque partout dans Ω. Soit $A = \{x \in \Omega : \nabla\phi_1 = 0\}$, alors nons trouvons

$$\nabla u = 0 \qquad \text{presque partout dans } A$$

et

$$(p-1)\frac{|\nabla u|^p\,\phi_1^p}{|\nabla\phi_1|^p} - p\,\frac{|\nabla u|^{p-1}\,\phi_1^{p-1}}{|\nabla\phi_1|^{p-1}} + 1 = 0 \qquad \text{presque partout dans } \Omega\backslash A \qquad (3.4.9)$$

Posons $X = \frac{|\nabla u|\phi_1}{|\nabla\phi_1|}$ alors, en substituant dans (3.4.9), on obtient

$$(p-1)X^p - pX^{p-1} + 1 = 0 \qquad \text{avec } X \geq 0,$$

qui admet dans $\mathbb{R}^+$ une solution unique $X = 1$ car $p > 1$, alors

$$|\nabla u|\,\phi_1 = (p-1)\,|\nabla\phi_1| \qquad \text{presque partout dans } \Omega\backslash A$$

Mais $L(u,\phi_1) = 0$, alors

$$|\nabla u|^p\,\phi_1^p + (p-1)^{p-1}\frac{1}{(p-1)^p}\,|\nabla u|^p\,\phi_1^p - p\,|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u.\nabla\ \phi_1\ \phi_1^{p-1} = 0$$

et par suite

$$\frac{p}{p-1}\,|\nabla u|^p\,\phi_1^p - p\,|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u.\nabla\ \phi_1\ \phi_1^{p-1} = 0$$

ou bien

$$p\,|\nabla u|^{p-2}\,\phi_1^{p-2}\nabla u(\frac{1}{p-1}\nabla u\ \phi_1 - \nabla\phi_1) = 0 \qquad \text{presque partout dans } \Omega\backslash A \qquad (3.4.10)$$

D'autre part $\nabla u \neq 0$ presque partout dans $\Omega\backslash A$: en effet, si $\nabla u(x) = 0$ alors $\nabla\phi_1(x) = 0$, puisque $L(u,\phi_1) = 0$ donc $x \in A$. Par conséquent, puisque $\phi_1 > 0$ nous pouvons conclure que $\frac{1}{p-1}\nabla u\ \phi_1 - \nabla\phi_1 = 0$ presque partout dans $\Omega\backslash A$, d'après (3.4.10). Alors

$$\nabla u\ = (p-1)\frac{\nabla\phi_1}{\phi_1} \qquad \text{presque partout dans } \Omega\backslash A$$

et puisque $\nabla u = \nabla\phi_1 = 0$ presque partout dans A, il en résulte

$$\nabla u\ = (p-1)\frac{\nabla\phi_1}{\phi_1} = \nabla(\log(\phi_1^{p-1})) \qquad \text{presque partout dans } \Omega$$

alors $u = \log(\phi_1^{p-1}) + k$, ou bien $\phi_1^{p-1} = e^{u-k} \geq e^{-k}$ presque partout dans Ω, ce qui est impossible. ■

En appliquant le théorème 3.1.2 nous obtenons le corollaire 2.5 :

Corollaire 3.4.4 *Si $\lambda > \lambda_1(f) \geq 0$, ou $\lambda = \lambda_1(f) > 0$ et $f \in L^{N/p}(\Omega)$, alors le problème (3.4.2) n'admet aucune solution renormalisée.*

Preuve. Si (3.4.2) admet une solution renormalisée v alors $u = \ln(1+v)$ est une solution renormalisée du problème (3.4.1), d'après le théorème 3.1.2. ∎

Finalement, admettons provisoirement le résultat suivant concernant le problème linéaire en v avec une donnée mesure $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda\, f(x)(1+g(v))^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.4.11}$$

Théorème 3.4.5 *Si $0 < \lambda < \lambda_1(f)$, pour* ***toute*** *mesure $\mu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$, il existe au moins une solution renormalisée v du problème (3.4.11).*

Ce théorème est un cas particulier d'un résultat **plus général** qui sera donné dans le chapitre 6 par le théorème 6.1.1 où nous traiterons des non-linéarités plus générales avec une donnée mesure de Radon bornée quelconque sans hypothèse de signe. Notons que ce résultat sera établi pour une **mesure non nécessairement singulière** ; cela étend le résultat [1, Theorem 2.6] relative au cas du *Laplacien*, c'est à dire $p = 2$, et où la mesure considérée est singulière.

Comme conséquence des théorèmes 3.4.5 et 3.1.2 nous obtenons le résultat de multiplicité suivant :

Corollaire 3.4.6 *Supposons que $f \in L^r(\Omega), r > N/p$. Si $0 < \lambda < \lambda_1(f)$ alors il existe une* ***infinité*** *de solutions $u_s = \ln(1+v_s) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ of (1.10), mois régulière que u_0.*

Preuve. Pour chaque $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ il existe une solution renormalisée v_s de (3.4.11) par le théorème 3.4.5, donc $u_s = \ln(1+v_s) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution de (3.4.1), par le théorème 3.1.2. ∎

Bibliographie

[1] Abdellaoui B., Dall'Aglio A., and Peral I., *Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient*, J. Diff. Equ.,222 (2006), 21-62.

[2] Cuesta M., *Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weights,* Electronic J. Diff. Equ. 33 (2001), 1-9.

[3] Dal Maso G., and Malusa A., *Some properties of reachable solutions of nonlinear elliptic equations with measure data,* Ann. Scuola Norm. sup. Pisa, 25 (1997), 375-396.

[4] Dal Maso G., Murat F., Orsina L., and Prignet A., *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 28 (1999), 741-808.

[5] Díaz J.I., and Saá J.E., *Existence et unicité de solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilinéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 305(12) : 521-524, 1987.

[6] Lucia, M. and Prashanth, S., *Simplicity of principal eigenvalue for p-Laplace operator with singular indefinite weight*, Arch. Math. (Basel), 86(1) : 79-89, 2006.

[7] Malusa A., *A new proof of the stability of renormalized solutions to elliptic equations with measure data,* Asympt. Anal. 43 (2005), 11-129.

[8] Peral I., *Multiplicity of solutions for the p-Laplacian*, International Center for Theoretical Physics, Trieste 1997.

Chapitre 4

Existence de solutions pour le problème $(P_{v,\lambda})$.

Sommaire

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude de l'existence de solutions positives du problème $(P_{v,\lambda})$ sans mesure :

$$(P_{v,\lambda}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p v = \lambda\, f(x)(1+g(v))^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

pour une fonction g positive quelconque satisfaisant l'hypothèse

$$g \in C^1([0,\Lambda)),\ \Lambda \leq \infty,\ g(0) = 0 \text{ et } g \text{ est croissante, } g \not\equiv 0. \tag{4.1.2}$$

sous des hypothèses convenables sur f qui est positive et au moins integrable sur Ω.

Nous allons vérifier que l'ensemble de λ pour laquelle il existe une solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (respectivement $\mathcal{W}(\Omega)$) est un intervalle $[0,\lambda^*)$ (respectivement $[0,\lambda_r)$) et l'ensemble de λ pour laquelle il existe une solution $\underline{v}_\lambda$ dans $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $\|\underline{v}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$ est un intervalle $[0,\lambda_b)$.

Dans la section 4.3, nous essayons de répondre à deux questions principales qui peuvent naturellement se poser, qui sont les suivantes :

(1) Quand a-t-on $\lambda_b = \lambda^* = \lambda_r$?

(2) Si $\lambda^* < \infty$, que se passe-t-il pour $\lambda > \lambda^*$?

Dans la sous-section 4.3.1, nous établissons des résultats sous des hypothèses de convexité sur g ou $H \times (1+g)$, où H est définie par (3.1.5), voir le théorème 4.3.3. Notre résultat est une extension du résultat bien connu de [2], relatif au cas $p = 2$. Le point clé dans le raisonnement de [2] est une inégalité de la forme

$$-\Delta_p \Phi(v) \geq (\Phi'(v))^{p-1}(-\Delta_p v), \tag{4.1.3}$$

qui est formellement satisfaite pour une fonction v sur Ω et p quelconque si Φ est une fonction concave sur $\mathbb{R}$. Dans [2, Lemme 2], dans le cas $p = 2$, les auteurs ont montré cette inégalité au sens que

$$-\int_\Omega \Phi(v)\Delta\zeta dx \geq \int_\Omega \Phi'(v)(-\Delta v)\zeta dx, \qquad \forall \zeta \in C^2\left(\overline{\Omega}\right), \zeta = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

sous les hypothèses suivantes sur Φ et v :

- $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$ est concave telle que Φ' bornée et $\Phi(0) = 0$.
- $v \in L^1(\Omega)$ est une solution *très faible* de $-\Delta\, v = f \in L^1(\Omega, \rho(x)dx)$ avec $v = 0$ sur $\partial\Omega$, où ρ est la distance au bord $\partial\Omega$, dans le sens que

$$-\int_\Omega v\Delta\zeta dx = \int_\Omega f\zeta dx, \qquad \forall \zeta \in C^2\left(\overline{\Omega}\right), \zeta = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Dans le cas $p \neq 2$, il n'y a pas de notion de solution *très faible*. Dans le théorème 4.3.1 nous considérons une solution renormalisée quelconque $v \in \mathcal{W}(\Omega)$ telle que $-\Delta_p v \geq 0$ et nous montrons l'inégalité (4.1.3) dans $L^1(\Omega)$ pour un choix particulier de Φ, voir la remarque 4.3.2.

Dans la sous-section 4.3.2, nous donnons quelques résultats répondant aux deux questions (1) et (2) sans hypothèses de convexité sur g, dans le cas $\Lambda = \infty$ et où g est à croissance lente :

$$M_Q = \lim\sup_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{g(\tau)^{p-1}}{\tau^Q} < \infty \tag{4.1.4}$$

pour un certain $Q \in (0, Q_1)$, où

$$Q_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}, \qquad (Q_1 = \infty \text{ si } p = N). \tag{4.1.5}$$

4.2 L'intervalle d'existence pour λ

Nous commençons par un résultat d'existence simple, où g satisfait seulement (4.1.2), $\Lambda \leq \infty$, sans aucune condition de croissance par rapport à une puissance, sous l'hypothèse $\mathcal{G}(f) \in L^\infty(\Omega)$ où $\mathcal{G}$ est défini par (2.2.12) de la définition 2.2.18. Cette hypothèse faible sur f est satisfaite en particulier quand $f \in L^r(\Omega), r > N/p$.

Proposition 4.2.1 *Supposons (4.1.2) et $\mathcal{G}(f) \in L^\infty(\Omega)$. Alors il existe $\lambda_0 > 0$ telle que pour tout $0 < \lambda \leq \lambda_0$, le problème $(P_{v,\lambda})$ admet une solution minimale bornée $\underline{v}_\lambda$ telle que $\|\underline{v}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$.*

Réciproquement, si $L = H(\Lambda) < \infty$, (en particulier si $\Lambda < \infty$) et si il existe $\lambda > 0$ telle que $(P_{v,\lambda})$ admet une solution renormalisée, alors $\mathcal{G}(f) \in L^\infty(\Omega)$.

Preuve. Soit $w = \mathcal{G}(f) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Soit $a > 0$ tel que $a\|w\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$. Soit $\lambda_0 = a((1 + g(a\|w\|_{L^\infty(\Omega)})))^{-(p-1)}$ et $\lambda \leq \lambda_0$ fixé. Alors

$$-\Delta_p(aw) = af(x) = \lambda_0 f(x)((1 + g(a\|w\|_{L^\infty(\Omega)})))^{(p-1)} \geq \lambda(1 + g(aw))^{p-1}$$

puisque g croissante. Il existe une solution minimale $\underline{v}_\lambda$ intermédiaire entre la sous-solution 0 et la sur-solution aw, obtenue comme limite croissante d'un schéma itératif. En effet, en partant de la sous-solution $v_0 = 0$, nous pouvons définir une suite de fonctions de $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ par :

$$v_n = \mathcal{G}(\lambda f(x)(1 + g(v_{n-1}))^{p-1}), n \geq 1. \tag{4.2.1}$$

Par le principe de comparaison nous avons

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq ... \leq v_{n-1} \leq v_n \leq ... \leq \overline{v} = aw.$$

Donc nous pouvons extraire une sous suite qui converge vers une solution $\underline{v}_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ du problème $(P_{v,\lambda})$ telle que $\|\underline{v}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq a\,\|w\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$. En fait toute la suite converge car elle est croissante. De plus, $\underline{v}_\lambda$ est la solution minimale, puisque pour toute solution v_λ nous pouvons construire le schéma en considerant la fonction $\overline{v} = v_\lambda$ comme sur-solution.

Réciproquement, soit v une solution de $(P_{v,\lambda})$. Alors $u = H(v)$ est une solution de $(P_{u,\lambda})$ (ou (1.1)) avec $\beta = T^{-1}(g)$, d'après le théorème 3.1.2. Notons $w = \mathcal{G}(f)$, nous avons

$$-\Delta_p u \geq \lambda\, f = \lambda(-\Delta_p w) = -\Delta_p(\lambda^{\frac{1}{p-1}} w) \qquad \text{dans } L^1(\Omega),$$

donc, par le principe de comparaison, $\lambda^{\frac{1}{p-1}} w \leq u$ presque partout dans Ω. Mais $u \leq L$, puisque H est croissante, donc $\lambda^{1/(p-1)}\mathcal{G}(f) \leq L$ presque partout dans Ω. D'où $\mathcal{G}(f) \in L^\infty(\Omega)$. ■

Remarque 4.2.2 *Il est clair que l'existence pour* λ *petit est valable même si* $g(0) > 0$.

Remarque 4.2.3 *Le résultat inverse est optimal comme le montre l'exemple suivant : prenons* $f = 1/\,|x|^p$ *avec* $0 \in \Omega$, *alors* $\mathcal{G}(f) \notin L^\infty(\Omega)$. *Pour* $\lambda > 0$ *quelconque, on sait q'il n'y a pas de solutions du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \frac{\lambda}{|x|^p}(1+v)^Q & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

pour $Q > p-1$; *dans ce cas* $L < \infty$. *Par contre par le théorème 3.1.3, pour* $Q = p-1$ *et* $0 < \lambda < \lambda_1(f)$, *il existe une solution ; dans ce cas* $H(\infty) = \infty$.

Remarque 4.2.4 *Quand* $\Lambda < \infty$, *et* g *a une asymptote en* Λ, *il peut exister des solutions avec* $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \Lambda$. *Considérons l'exemple 9 du paragraphe 3.2 de [1] avec* $p = 2$ *et* $\Omega = B(0,1)$. *Dans cet exemple nous avons*

$$1 + g(v) = (1-v)^{-Q}, \quad Q > 0, \quad \text{et} \quad \beta(u) = Q(1-(Q+1)u).$$

Pour $\lambda = 2((N-2)Q+N)/(Q+1)^2$, *le problème* $(P_{u,\lambda})$ *admet la fonction* $u = (1-r^2)/(Q+1)$ *comme solution. Alors* $v = \Psi(u) = 1 - r^{2/(Q+1)} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, *et* $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$.

L'ensemble des $\lambda \geq 0$ pour laquelle le problème $(P_{v,\lambda})$ admet une solution dépend a priori de la régularité des solutions. Nous introduisons trois classes de solutions . Dans le cas $\Lambda < \infty$ la notion de solution tient compte du fait que $0 \leq v(x) < \Lambda$ presque partout dans Ω.

Définition 4.2.5 *(i) Soit* S_r *l'ensemble des* $\lambda \geq 0$ *telle que* $(P_{v,\lambda})$ *a une solution* ***renormalisée*** v, *autrement dit* $v \in \mathcal{W}$.

(ii) Soit S_* *l'ensemble des* $\lambda \geq 0$ *telle que* $(P_{v,\lambda})$ *a une solution* ***variationnelle*** v, *c'est à dire* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(iii) Soit S_b *l'ensemble des* $\lambda \geq 0$ *telle que* $(P_{v,\lambda})$ *a une solution renormalisée* v ***bornée*** *telle que* $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$.

Remarque 4.2.6 *Les ensembles S_r, S_*, S_b sont des intervalles :*

$$S_r = [0, \lambda_r)\,, \quad S_* = [0, \lambda^*)\,, \quad S_b = [0, \lambda_b) \quad \textit{avec } \lambda_b \leq \lambda^* \leq \lambda_r \leq \infty. \tag{4.2.2}$$

En effet si λ_0 appartient à l'un de ces trois ensembles, et v_{λ_0} est une solution de (P_{v,λ_0}), alors v_{λ_0} est une sur-solution de $(P_{v,\lambda})$ pour tout $\lambda < \lambda_0$. Entre la sous-solution 0 et v_{λ_0}, il existe une solution minimale v_{m,λ_0} de $(P_{v,\lambda})$, obtenue comme une limite croissante du schéma itératif (4.2.1). En particulier l'application $\lambda \to v_{m,\lambda}$ est croissante, dans le sens que si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ alors $v_{m,\lambda_1} \leq v_{m,\lambda_2}$ presque partout dans Ω.

Dans le cas $\Lambda = \infty$, S_b est l'ensemble de $\lambda \geq 0$ telle que $(P_{v,\lambda})$ admet une solution $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Pour tout $\lambda < \lambda_b$ il existe une solution minimale bornée $\underline{v}_\lambda$. Et $\lambda_b \leq \lambda^*$ puisque toute solution renormalisée bornée est dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ d'après la remarque 2.2.10.

Si $\Lambda < \infty$, alors $\lambda_r = \lambda^*$, puisque $S_r = S_*$, d'après la remarque 2.2.10. De plus $\lambda^* < \infty$. En effet toute solution v de $(P_{v,\lambda})$ satisfait $\lambda^{\frac{1}{p-1}}\mathcal{G}(f) \leq v < \Lambda$ presque partout dans Ω, et $\mathcal{G}(f) \not\equiv 0$.

4.3 Egalité des intervalles

La question principale est de savoir si $\lambda_b = \lambda^* = \lambda_r$, comme nous l'avons montré dans le cas quand $g(v) = v$, par le théorème 3.1.3 du chapitre 3, où $\lambda^* = \lambda_1(f)$. Il a été montré quand g est définie sur $[0, \infty)$ et convexe dans [2] pour $p = 2$. Nous commençons par établir des résultats sous des hypothèses de convexité.

4.3.1 Convexité

Dans [2], pour $p = 2$, les auteurs ont utilisés une méthode basée sur la transformation $u = H(v)$, même si le problème $(P_{u,\lambda})$ n'était pas introduit. En utilisant les équations satisfaites par les troncatures comme dans la démonstration du théorème 3.1.2, nous pouvons étendre le point clé de la preuve :

Théorème 4.3.1 *Soient $g_1, g_2 \in C^1([0, \Lambda))$ deux fonctions croissantes , avec $0 < g_2 \leq g_1$ sur $[0, \Lambda)$. Soit $v \in \mathcal{W}(\Omega)$ telle que $-\Delta_p v \geq 0$ presque partout dans Ω, et $0 \leq v < \Lambda$ presque partout dans Ω. Soient*

$$H_1(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{g_1(s)}, \qquad H_2(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{g_2(s)},$$

Supposons que

$$0 \leq g_2' \circ H_2^{-1} \leq g_1' \circ H_1^{-1} \qquad \textit{sur } [0, H_1(\Lambda))\,. \tag{4.3.1}$$

Alors $\bar{v} = H_2^{-1}(H_1(v)) \in \mathcal{W}$, *et* $\bar{v} \leq v$, *et*

$$-\Delta_p \bar{v} \geq \left(\frac{g_2(\bar{v})}{g_1(v)}\right)^{p-1} (-\Delta_p v) \qquad \textit{dans } L^1(\Omega). \tag{4.3.2}$$

Preuve. Pour simplifier, nous pouvons supposer que $g_1(0) = 1$, sans perte de généralité. Soit $u = H_1(v)$, et $F = -\Delta_p v$. Appliquons le théorème 3.1.2 avec $g = g_1 - 1$ et $f = Fg_1(v)^{1-p} \leq F$, nous trouvons que la fonction u est une solution renormalisée de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \beta_1(u) \left|\nabla u\right|^p + Fg_1(v)^{1-p} & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\beta_1(u) = (p-1)g_1'(v) = (p-1)g_1'(H_1^{-1}(u))$. Soit

$$\bar{v} = H_2^{-1}(u) = (H_2^{-1} \circ H_1)(v)$$

alors $\bar{v} \leq v$, car $g_2 \leq g_1$. Posons $\beta_2(u) = (p-1)g_2'(\bar{v}) = (p-1)g_2'(H_2^{-1}(u))$, nous pouvons écrire

$$\beta_1(u) \left|\nabla u\right|^p = \beta_2(u) \left|\nabla u\right|^p + \eta,$$

avec

$$\begin{aligned} \eta &= (\beta_1(u) - \beta_2(u)) \left|\nabla u\right|^p \\ &= (p-1)(g_1'(H_1^{-1}(u)) - g_2'(H_2^{-1}(u))) \left|\nabla u\right|^p. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse (4.3.1) nous obtenons $g_1'(v) \geq g_2'(\bar{v}) \geq 0$, c'est à dire $0 \leq \beta_1 \leq \beta_2$, par suite

$$0 \leq \beta_2(u) \left|\nabla u\right|^p \leq \beta_1(u) \left|\nabla u\right|^p \in L^1(\Omega),$$

donc $\eta \in L^1(\Omega)$ et $\eta \geq 0$; donc

$$-\Delta_p u = \beta_2(u) \left|\nabla u\right|^p + \bar{f}$$

avec $\bar{f} = Fg_1(v)^{1-p} + \eta$. Par le lemme 3.3.4, les troncatures $T_k(v), T_K(u), T_k(\bar{v})$ satisfont respectivement les équations

$$\begin{aligned} -\Delta_p T_k(v) &= F\chi_{\{v<k\}} + \mu_k, \\ -\Delta_p T_K(u) &= \beta_1(T_K(u)) \left|\nabla T_K(u)\right|^p + Fg_1(v)^{1-p}\chi\left\{u < K\right\} + \alpha_K, \\ -\Delta_p T_k(\bar{v}) &= \bar{f}g_2(\bar{v})^{p-1}\chi_{\{\bar{v}<k\}} + \bar{\mu}_k, \end{aligned}$$

dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, où

$$\alpha_K = g_1(v)^{1-p}\mu_k, \qquad \bar{\mu}_k = (g_2(k)/g_1(k))^{p-1}\mu_k.$$

Comme dans la preuve du théorème 3.1.1, nous obtenons $\bar{f}g_2(\bar{v})^{p-1} \in L^1(\Omega)$, et $\bar{f}g_2(\bar{v})^{p-1}\chi_{\{\bar{v}<k\}}$ converge vers $\bar{f}g_2(\bar{v})^{p-1}$ fortement dans $L^1(\Omega)$. De plus μ_k converge vers 0 pour la topologie étroite des mesures lorsque $k \to \Lambda$, donc $\lim_{k\to\Lambda} \mu_k(\Omega) = 0$; et $g_2(k) \leq g_1(k)$, donc $\lim \bar{\mu}_k(\Omega) = 0$, et $\bar{\mu}_k$ converge vers 0 pour la topologie **étroite**. Alors par théorème 2.2.12, $\bar{v}$ est une solution **renormalisée** de

$$\begin{cases} -\Delta_p \bar{v} = \bar{f}g_2(\bar{v})^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ \bar{v} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors $-\Delta_p \bar{v} \in L^1(\Omega)$, et $\bar{v}$ satisfait (4.3.2). ■

Remarque 4.3.2 *L'hypothèse (4.3.1) est équivalente à la concavité de la fonction* $\overline{\phi} = H_2^{-1} \circ H_1$; *et(4.3.2) signifie que*

$$-\Delta_p \overline{\phi}(v) \geq (\overline{\phi}'(v))^{p-1}(-\Delta_p v) \qquad \text{dans } L^1(\Omega).$$

Si nous considérons une fonction concave ***quelconque*** Φ *l'inégalité (4.1.3) est formelle. Pour le choix particulier* $\Phi = \overline{\phi}$, *l'inégalité* ***n'est pas formelle*** *, puisqu'il n'y a pas de mesures qui apparaissent.*
Notons que ce choix particulier joue un rôle important dans la démonstration du [2, Théorème 3].

Maintenant nous donnons notre résultat principal (qui couvre en particulier le théorème 2.8). Nous avons affaibli l'hypothèse de convexité de g sur $[0, \Lambda)$:

Théorème 4.3.3 *Soit* g *satisfaisant (4.1.2), et* H *est définie par (3.1.5) sur* $[0, \Lambda)$, *et* $f \in L^1(\Omega)$. *Dans le cas* $\Lambda = \infty, L = H(\Lambda) = \infty$ *nous supposons que* $f \in L^r(\Omega)$, $r > N/p$. *Supposons que pour un certain* $\lambda > 0$ *il existe une solution renormalisée* v *de* $(P_{v,\lambda})$ *telle que* $0 \leq v(x) < \Lambda$ *presque partout dans* Ω.

Supposons que $H \times (1+g)$ *est convexe sur* $[0, \Lambda)$, *ou que* g *est convexe au voisinage de* Λ. *Alors pour tout* $\varepsilon \in (0,1)$ *il existe une solution bornée* w, *telle que* $\|w\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$ *de*

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \lambda(1-\varepsilon)^{p-1} f(x)(1+g(w))^{p-1} & \textit{dans} \quad \Omega, \\ w = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3.3}$$

En d'autres termes, $\lambda_b = \lambda^* = \lambda_r$.

Preuve. Premier cas : $L = H(\Lambda) = \displaystyle\int_0^\Lambda \frac{ds}{(1+g(s))} < \infty.$

• D'abord supposons que $H \times (1+g)$ est convexe sur $[0, \Lambda)$. Nous prenons $g_1 = 1+g$ et $g_2 = (1-\varepsilon)g_1$. Nous désirons appliquer la proposition 4.3.1 pour g_1 et g_2 et leurs fonctions associés H_1 et H_2. Nous avons $H_1 = H$ et $H_2 = H/(1-\varepsilon)$. En écrivant $u = (1-\varepsilon)^{-1}H(H^{-1}((1-\varepsilon)u)) = H_2(H^{-1}((1-\varepsilon)u))$ nous trouvons

$$H_2^{-1}(u) = H^{-1}((1-\varepsilon)u) = \Psi((1-\varepsilon)u).$$

Il est facile de vérifier que la condition (4.3.1) est équivalente à

$$(1-\varepsilon)ug'(\Psi((1-\varepsilon)u) \le ug'(\Psi(u)).$$

En terme de u, cette inégalité signifie que la fonction $u \longmapsto u\beta(u)$ est croissante ; en terme de v cela veut dire que $H \times g'$ est croissante. Et ceci est vraie quand $H \times (1+g)$ est convexe, puisque $(H \times (1+g))' = 1 + H \times g'$. Alors par le théorème 4.3.1, la fonction $\bar{v} = H_2^{-1}(H(v)) = \Psi((1-\varepsilon)H(v))$ satisfait dans $L^1(\Omega)$ l'inégalité

$$\begin{aligned}
-\Delta_p \bar{v} &\ge (\frac{g_2(\bar{v})}{1+g(v)})^{p-1}(-\Delta_p v) \\
&= (\frac{(1-\varepsilon)(1+g(\bar{v}))}{1+g(v)})^{p-1}\lambda\, f(x)(1+g(v))^{p-1} \\
&= \lambda(1-\varepsilon)^{p-1}f(x)(1+g(\bar{v}))^{p-1}.
\end{aligned}$$

Donc $\bar{v}$ est une sur-solution pour le problème $(P_{v,\rho})$, avec $\rho = (1-\varepsilon)^{p-1}\lambda$. D'autre part, puisque $\varepsilon \in (0,1)$ et $\Psi = H^{-1}$ est strictement croissante alors $\bar{v}(x) \le \Psi((1-\varepsilon)L) < \Psi(L) = \Lambda$ presque partout dans Ω. Par suite $\bar{v}$ est bornée avec $\|\bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$. Donc il existe une solution w de (4.3.3) telle que $w \le \bar{v}$, d'où $\|w\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$.

• Maintenant, supposons que g est convexe sur $[A, \Lambda)$, avec $0 \le A < \Lambda$. Fixons $d > A$. Nous pouvons choisir R suffisamment petit de facon que le cercle (C) tangent au graphe de $1+g$ de rayon R reste au dessus du graphe et l'abscisse du centre c de (C) soit $A < c \le d$, puisque $1+g$ est convexe et croissante sur $[A, \Lambda)$. Choisissons R très petit telle que $R < \frac{\varepsilon}{2}$. Notons que dans le cas $c = d$, nous avons $g'(d) = 0$. Dans ce cas notons par g_1 la fonction sur $[0, \Lambda)$ qui vaut $1+g(d)$ sur $[0, d)$ et $1+g$ sur $[d, \Lambda)$. Dans le cas $g'(d) > 0$, on considère la tangente horizontale à (C) au point d'abscisse c de la partie inférieure de (C) , elle coupe le graphe de $1+g$ en un point d'abscisse B telle que $c < B < d$. Soit $M = 1+g(B)$, nous considerons g_1 la fonction suivante

$$g_1(s) = \begin{cases} M, & \text{sur} \quad [0, c)\,, \\ M + R - (R^2 + (s-c)^2)^{1/2} & \text{sur} \quad [c, d]\,, \\ 1+g, & \text{sur} \quad [d, \Lambda)\,. \end{cases}$$

Donc nous construisons une fonction convexe croissante $g_1 \in C^1([0, \Lambda))$ telle que $g_1 \ge 1+g$, et

$$\begin{cases} M \le g_1(s) \le M(1+\frac{\varepsilon}{2}) & \text{sur} \quad [0, d]\,, \\ g_1(s) = 1 + g(s) & \text{sur} \quad [d, \Lambda)\,. \end{cases}$$

Nous posons $g_2 = (1-\frac{\varepsilon}{2})g_1$. Alors, par la proposition 4.3.1 la fonction $\bar{v} = H_2^{-1}(H_1(v)) = \Psi_1((1-\frac{\varepsilon}{2})H_1(v))$ satisfait

$$-\Delta_p \bar{v} \geq \lambda f(x) F_\varepsilon^{p-1}, \qquad \text{où } F_\varepsilon = (1-\frac{\varepsilon}{2})\frac{g_1(\bar{v})}{g_1(v)}(1+g(v)),$$

et $\bar{v} \leq v$. Dans le cas où $g'(d) = 0$ nous avons

• Sur $[0,d]$, nous avons $g_1(\bar{v}) = g_1(v) = 1+g(d)$ alors puisque g est croissante

$$F_\varepsilon = (1-\frac{\varepsilon}{2})(1+g(v)) \geq (1-\varepsilon)(1+g(\bar{v})).$$

• Sur $[d,\Lambda)$, nous avons $g_1 = 1+g$ et donc

$$F_\varepsilon = (1-\frac{\varepsilon}{2})g_1(\bar{v}) \geq (1-\varepsilon)(1+g(\bar{v}).$$

Dans le cas où $g'(d) > 0$ nous distingons trois cas possibles

• Sur l'ensemble $\{\bar{v} \leq v \leq d\}$, nous avons $M \leq g_1(\bar{v})$ et $g_1(v) \leq M(1+\varepsilon)$, donc

$$F_\varepsilon \geq \frac{(1-\frac{\varepsilon}{2})}{(1+\frac{\varepsilon}{2})}(1+g(\bar{v})) \geq (1-\varepsilon)(1+g(\bar{v})).$$

• Sur l'ensemble $\{d \leq \bar{v} \leq v\}$, nous avons $g_1 = 1+g$, donc en substituant dans l'expression de F_ε nous trouvons $F_\varepsilon \geq (1-\varepsilon)(1+g(\bar{v}))$.
• Sur l'ensemble $\{\bar{v} \leq d \leq v\}$, nous avons $g_1(\bar{v}) \geq 1+g(\bar{v})$ et $g_1(v) = 1+g(v)$ donc $F_\varepsilon \geq (1-\varepsilon)(1+g(\bar{v}))$.
Alors, dans tout les cas, nous avons

$$-\Delta_p \bar{v} \geq \lambda(1-\varepsilon)^{p-1} f(x)(1+g(\bar{v}))^{p-1} \qquad \text{dans} \qquad L^1(\Omega),$$

et nous conclurons comme précédemment.

Deuxième cas : $L = \infty$. Dans ce cas, la sur-solution déjà construite $\bar{v}$ n'est pas nécessairement bornée. Etendant [2], nous effectuons un argument itératif de "bootstrapp" basé sur le lemme 2.3.3 et la concavité de H_1, afin de construire une solution bornée. Puisque g_1 est croissante alors la fonction H_1 est concave, car $H_1'' = -g_1'/(g_1)^2$. Donc

$$H_1(v) - H_1(\bar{v}) \leq (v-\bar{v})H_1'(\bar{v})) = \frac{v-\bar{v}}{g_1(\bar{v})} \leq \frac{v}{g_1(\bar{v})}. \tag{4.3.4}$$

Nous avons $H_1(\bar{v}) = (1-\delta)H_1(v)$, où $\delta = \varepsilon$ ou $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, donc (4.3.4) implique $\delta g_1(\bar{v}) \leq v/H_1(v)$. D'autre part, puisque $L = \infty$ alors $H(s)$ tend vers ∞ lorsque $s \to \infty$, donc $v/H_1(v) \leq C(1+v)$ pour un certain $C > 0$. Par suite

$$\delta(1+g(\bar{v})) \leq \delta g_1(\bar{v}) \leq C(1+v).$$

Alors $(1+g(\bar{v}))^{p-1} \in L^{\sigma}(\Omega)$ pour tout $\sigma \in [1, N/(N-p))$, car v est une solution renormalisée. Puisque $f \in L^r(\Omega)$, $r > N/p$, par l'inégalité de Hölder, il existe $m_1 > 1$ telle que $f(1+g(\bar{v}))^{p-1} \in L^{m_1}(\Omega)$.
Entre la sous-solution 0 et la sur-solution $\bar{v}$ il existe une solution renormalisée w du problème $(P_{v,\lambda_{\varepsilon,1}})$ où $\lambda_{\varepsilon,1} = (1-\varepsilon)^{p-1}\lambda$, telle que $0 \le w \le \bar{v}$. Donc, puisque g est croissante, $-\Delta_p w \in L^{m_1}(\Omega)$.
Si $p = N$, alors $w \in L^{\infty}(\Omega)$ d'après le lemme 2.3.3 et nous conclurons comme précédemment.

Dans la suite nous supposons $p < N$. Nous distinguons les cas suivants :

• Si $m_1 > N/p$ alors $w \in L^{\infty}(\Omega)$.

• Si $m_1 = N/p$ alors $w \in L^k(\Omega)$ pour tout $k \ge 1$. Donc, puisque $r > N/p$, nous pouvons choisir k suffisamment large pour obtenir $f(1+g(w))^{p-1} \in L^s(\Omega)$ pour un $s > N/p$. Par suite $\bar{v} \in L^{\infty}(\Omega)$.

• Si $m_1 < N/p$. Posons $w_1 = w$. Par le lemme 2.3.3, $w_1^{(p-1)\sigma} \in L^1(\Omega)$ avec $\sigma = Nm_1/(N-pm_1)$. Soit m_2 :

$$\frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{r} - \frac{p}{N}.$$

Nous avons $m_1 < m_2$.

Remplaçons $1+g$ par $(1-\varepsilon)(1+g)$ nous construisons de la même facon une solution w_2 de $(P_{v,\lambda_{\varepsilon,2}})$ où $\lambda_{\varepsilon,2} = (1-\varepsilon)^{2(p-1)}\lambda$, telle que $g(w_2) \le C(1+w_1))$. Par itération, nous construisons une solution w_n of $(P_{v,\lambda_{\varepsilon,n}})$ où $\lambda_{\varepsilon,n} = (1-\varepsilon)^{n(p-1)}\lambda$, telle que $g(w_n) \le C(1+w_{n-1}))$, donc $f(1+g(w_n))^{p-1} \in L^{m_n}(\Omega)$, avec

$$\frac{1}{m_n} - \frac{1}{r} = \frac{1}{m_{n-1}} - \frac{p}{N}.$$

Il existe un entier $\bar{n} = \bar{n}(r,p,N)$ telle que $m_{\bar{n}} > N/p$. Si non, alors la suite m_n admet une limite finie et nous obtenons $r = N/p$ en passant à la limite dans la relation d'itération. Donc $w_{\bar{n}+1} \in L^{\infty}(\Omega)$ par le lemme 2.3.3. Puisque ε est arbitraire, nous obtenons une solution bornée de (4.3.3). ■

Dans le cas où g est convexe sur $[0,\Lambda)$, nous donnons le résultat d'existence suivant :

Théorème 4.3.4 *Soit g satisfaisant (4.1.2), et H est définie par (3.1.5) sur $[0,\Lambda)$, et $f \in L^1(\Omega)$. Dans le cas $\Lambda = \infty, L = H(\Lambda) = \infty$ nous supposons que $f \in L^r(\Omega)$, $r > N/p$. Supposons que pour un certain $\lambda > 0$ il existe une solution renormalisée v de $(P_{v,\lambda})$ telle que $0 \le v(x) < \Lambda$ presque partout dans Ω.*

Supposons que g est convexe sur $[0,\Lambda)$. Alors pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ il existe une solution bornée w telle que $\|w\|_{L^{\infty}(\Omega)} < \Lambda$ de

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \lambda f(x)(1+g(w)-\varepsilon)^{p-1} & \textit{dans} \quad \Omega, \\ w = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

Preuve. Supposons que g est convexe sur $[0,\Lambda)$. Nous prenons $g_1 = 1+g$ et $g_2 = g_1 - \varepsilon$, alors (4.3.1) est satisfaite, car g' est croissante et $H_1 \leq H_2$. Appliquons la proposition 4.3.1, nous trouvons que $\bar{v} = H_2^{-1}(H_1(v))$ est une sur-solution du problème (4.3.5). Alors il existe une solution de w of (4.3.5), telle que $0 \leq w \leq \bar{v} = H_2^{-1}(H_1(v))$. Par contradiction, nous trouvons seulement que $w(x) \leq \bar{v}(x) < \Lambda$ presque partout dans Ω, , mais pas $\|w\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$.
Nous avons $H_1(v) = H_2(\bar{v})$, d'où

$$\begin{aligned} H_1(v) - H_1(\bar{v}) &= \int_0^{\bar{v}} (\frac{1}{g_2(s)} - \frac{1}{g_1(s)})ds = \int_0^{\bar{v}} (\frac{1}{g_1(s)-\varepsilon} - \frac{1}{g_1(s)})ds \\ &= \varepsilon \int_0^{\bar{v}} \frac{ds}{g_1(s)(g_1(s)-\varepsilon)} \geq \varepsilon \int_0^{\bar{v}} \frac{ds}{g_1(s)^2}. \end{aligned}$$

Alors, pour $A > 0$ fixé, il existe $C(A) > 0$ telle que $H_1(v) - H_1(\bar{v}) \geq C(A)\varepsilon$, presque partout sur l'ensemble $\{\bar{v} > A\}$. Mais H_1 satisfait (4.3.4), donc $g_1(\bar{v}) \leq v/\varepsilon C(A)$ sur cet ensemble. Par suite, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon g_1(v_1) \leq C_\varepsilon(1+v)$, où $v_1 = w$. En remplaçant g par $g - n\varepsilon$, et en effectuant un nombre fini d'étapes, comme dans la démonstration du théorème 4.3.3 dans le cas $L = \infty$, nous trouvons une solution bornée de (4.3.3), puisque ε est arbitraire. ■

Comme conséquence nous obtenons le résultat de non-existence suivant :

Corollaire 4.3.5 *Soit g satisfaisant (4.1.2), et H est définie par (3.1.5) sur $[0,\Lambda)$, et $f \in L^1(\Omega)$. Dans le cas $\Lambda = \infty, L = H(\Lambda) = \infty$ nous supposons que $f \in L^r(\Omega)$, $r > N/p$. Supposons que g est convexe sur $[0,\Lambda)$.*

Si $\lambda^* < \infty$, alors pour tout $c > 0$, il n'y a pas de solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda^* f(x)(1+g(v)+c)^{p-1} & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.3.6}$$

Preuve. Supposons qu'il existe une solution de (4.3.6) pour un certain $c > 0$. Alors

$$-\Delta_p v = \lambda^*(1+c)^{p-1} f(x)(1+\frac{g(v)}{(1+c)})^{p-1} \quad \text{dans } \Omega.$$

Appliquons le théorème 4.3.4 pour la fonction $g/(1+c)$ et $\varepsilon = c/2(1+c)$, il existe une solution bornée w telle que $\|w\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$, du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \lambda^* f(x)(1+g(w)+c/2)^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous prenons $\alpha > 0$ tel que $\alpha \leq c/2(1+\|g(w)\|_{L^\infty(\Omega)})$. Alors

$$\begin{aligned} (1+g(w)+c/2)^{p-1} &\geq (1+g(w)+\alpha(1+\|g(w)\|_{L^\infty(\Omega)}))^{p-1} \\ &\geq ((1+\alpha)(1+g(w)))^{p-1}. \end{aligned}$$

Par suite w est une sur-solution de $(P_{v,\lambda})$ où $\lambda = \lambda^*(1+\alpha)^{p-1}$, donc il existe une solution y de ce problème telle que $\|y\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|w\|_{L^\infty(\Omega)} < \Lambda$, ce qui contredit la définition de λ^*. ■

4.3.2 Cas où g a une croissance lente

Dans le cas linéaire $g(v) = v$, nous avons montré que $\lambda^* = \lambda_1(f)$, voir le théorème 3.1.3 du chapitre 3. Dans la suite, nous considérons des fonctions g ayant une **croissance lente**. Plus précisement g satisfait (4.1.4) pour un certain $Q \in (0, Q_1)$.

- **Cas** $Q \leq p-1$

Nous montrons le résultat suivant qui est une variante du théorème 3.4.1, lorsque g est **au plus linéaire** au voisinage de ∞ :

Théorème 4.3.6 *Soit g une fonction continue positive sur $[0,\infty)$ satisfaisant (4.1.4) avec $Q = p-1$, c'est à dire*

$$0 \leq M_{p-1}^{1/(p-1)} = \limsup_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{g(\tau)}{\tau} < \infty, \tag{4.3.7}$$

Supposons que $\lambda_1(f) > 0$. Alors :

(i) Si $M_{p-1}\lambda < \lambda_1(f)$ il existe au moins une solution positive $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème $(P_{v,\lambda})$. Autrement dit $\lambda^* \geq M_{p-1}^{-1}\lambda_1(f)$ si $M_{p-1} > 0$; et $\lambda^* = \infty$ si $M_{p-1} = 0$.

(ii) Si $(1+g(v))/v$ est strictement décroissante, alors la solution est unique.

(iii) Si $f \in L^r(\Omega), r > N/p$, alors toute solution satisfait $v \in L^\infty(\Omega)$, donc $\lambda_b = \lambda^*$. Si $f \in L^{N/p}(\Omega)$ et $p < N$, alors toute solution satisfait $v \in L^k(\Omega)$ pour tout $k > 1$.

Preuve. Soit $M > M_{p-1}$ telle que $M\lambda < \lambda_1(f)$. Il est clair que, par (4.3.7), il existe $A > 0$ tel que $(1+g(s))^{p-1} \leq M(A+s)^{p-1}$ sur $[0,\infty)$. Définissons $v_1 = \mathcal{G}(\lambda f) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ comme dans le cas linéaire du théorème 3.4.1 du chapitre 3, et $v_n = \mathcal{G}(\lambda f(1+g(v_{n-1}))^{p-1}) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Par(3.4.5), nous trouvons

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx &\leq \lambda M \int_\Omega f(A+v_{n-1})^{p-1} v_n dx \\ &\leq \frac{\lambda M(1+\varepsilon)}{\lambda_1(f)} \int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx + \lambda K_\varepsilon,\end{aligned}$$

avec une nouvelle constante $K_\varepsilon > 0$, et nous conclurons comme dans le théorème 3.4.1. L'unicité découle du lemme 2.2.21 comme dans le théorème 3.4.1, et la régularité est obtenue par la proposition 2.3.4, (iii). ■

Dans le cas où g est **sous-linéaire**, c'est à dire g satisfait (4.1.4) avec $Q < p-1$, nous appliquons le théorème 4.3.6 et montrer que si $\lambda_1(f) > 0$, alors $\lambda^* = \infty$:

Corollaire 4.3.7 *Soit g une fonction continue positive sur $[0,\infty)$ satisfaisant (4.1.4) avec $Q < p-1$. Si $\lambda_1(f) > 0$, alors $\lambda^* = \infty$.*

Preuve. En écrivant
$$\frac{g(\tau)^{p-1}}{\tau^{p-1}} = \frac{g(\tau)^{p-1}}{\tau^Q \tau^{p-1-Q}},$$
on conclut que $\limsup_{\tau\longrightarrow\infty} \dfrac{g(\tau)}{\tau} = 0$, si g vérifie (4.1.4) avec $Q < p-1$. D'où le résultat, par le théorème 4.3.6. ∎

Comme dans [3], nous obtenons des résultats d'existence pour quelques fonctions f sans supposer que $\lambda_1(f) > 0$ et sans imposer des hypothèses de petitesse sur λ :

Proposition 4.3.8 *Supposons que $p < N$, et g une fonction continue positive sur $[0,\infty)$ satisfaisant (4.1.4) avec $Q \in (0, p-1)$ et $f \in L^r(\Omega)$, $r \in (1, N/p)$, avec $Qr' < Q_1$.*

Alors pour tout $\lambda > 0$ il existe une solution renormalisée v de $(P_{v,\lambda})$ telle que $v^d \in L^1(\Omega)$ pour $d = Nr(p-1-Q)/(N-pr)$. En particulier $\lambda_r = \infty$. En plus

(i) Si $(Q+1)r' \le p^*$, alors $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, donc $\lambda^* = \infty$.

(ii) Si $(Q+1)r' > p^*$, alors $|\nabla v|^\theta \in L^1(\Omega)$ pour $\theta = Nr(p-1-Q)/(N-(Q+1)r)$.

Preuve. Par l'hypothèse (4.1.4), on déduit qu'il existe $M > 0$ tel que $(1+g(t))^{p-1} \le M(1+t)^Q$ pour tout $t \ge 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, on peut appliquer les résultats standard de Leray-Lions, voir [4] ; et on déduit qu'il existe $v_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ positive tel que
$$-\Delta_p v_n = \lambda T_n(f(x)(1+g(v_n))^{p-1}).$$
Pour un réel donné $\beta < 1$, nous considérons la fonction
$$\phi_\beta(s) = \int_0^s (1+|t|)^{-\beta} dt = \frac{1}{\beta-1}\left(1 - \frac{1}{(1+|s|)^{\beta-1}}\right)\mathrm{sign}(s),$$
nous avons $\phi_\beta \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $\phi'_\beta(s) = \frac{1}{(1+|s|)^\beta}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. De plus, puisque $\beta < 1$, on a $|\phi_\beta(s)| \le (1-\beta)^{-1}(1+|s|)^{1-\beta}$. Nous prenons $\phi_\beta(v_n)$ comme fonction test dans l'équation satisfaite par v_n, nous obtenons
$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^p}{(1+v_n)^\beta} dx &= \lambda \int_\Omega T_n(f(x)(1+g(v_n))^{p-1})\phi_\beta(v_n) dx \\ &\le (1-\beta)^{-1}\lambda M \int_\Omega f(1+v_n)^{1-\beta+Q} dx.\end{aligned}$$
Posons $\alpha = 1-\beta/p$ et $w_n = (1+v_n)^\alpha - 1$, on a
$$\nabla w_n = \alpha(1+v_n)^{\alpha-1}\nabla v_n = \alpha(1+v_n)^{-\beta/p}\nabla v_n, \tag{4.3.8}$$

donc nous obtenons

$$\frac{1}{\alpha^p}\int_\Omega |\nabla w_n|^p\,dx \le (1-\beta)^{-1}\lambda M\int_\Omega f(1+w_n)^{(1-\beta+Q)/\alpha}dx. \tag{4.3.9}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder nous trouvons

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(1+w_n)^{(1-\beta+Q)/\alpha}dx &\le c(\int_\Omega f\,dx+\int_\Omega f(w_n)^{(1-\beta+Q)/\alpha}dx)\\ &\le c\,\|f\|_{L^1(\Omega)}+c\,\|f\|_{L^r(\Omega)}\left(\int_\Omega w_n^{(1-\beta+Q)r'/\alpha}dx\right)^{1/r'}\end{aligned}$$

Par suite, par (4.3.9), il existe $C>0$ tel que

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p\,dx \le C(\|f\|_{L^1(\Omega)}+\|f\|_{L^r(\Omega)}\left(\int_\Omega w_n^{(1-\beta+Q)r'/\alpha}dx\right)^{1/r'}).$$

Nous pouvons choisir

$$\beta=((Q+1)r'-p^*)/(r'-p^*/p),$$

car $1-\beta=(p^*(1-1/p)-Qr')/(r'-p^*/p)=(Q_1-Qr')/(r'-p^*/p)>0$, puisque $r<N/p$ et $Qr'<Q_1$. Donc $\beta<1$. En effectuant cette substitution, nous obtenons

$$\begin{aligned}1-\beta+Q&=\frac{(Q+1)(r'-p^*/p)-(Q+1)r'+p^*}{(r'-p^*/p)}\\ &=\frac{p^*(p-Q-1)}{pr'-p^*}\end{aligned}$$

$$\alpha=1-\beta/p=1-\frac{(Q+1)r'-p^*}{pr'-p^*}=\frac{(p-Q-1)r'}{pr'-p^*}.$$

Donc $(1-\beta+Q)r'/\alpha=p^*$. Par conséquent, par l'injection de Sobolev

$$\int_\Omega |\nabla w_n|^p\,dx \le C(\|f\|_{L^1(\Omega)}+\|f\|_{L^r(\Omega)}\left(\int_\Omega |\nabla w_n|^p\,dx\right)^{p^*/pr'}),$$

avec une nouvelle constante $C>0$.
Puisque $r'>p^*/p$, donc en utilisant l'inégalité de Young (2.3.9) avec $\delta>0$ suffisamment petite nous déduisons que

$$(w_n)\text{ est bornée dans } W_0^{1,p}(\Omega),\text{ et donc dans } L^{p^*}(\Omega).$$

Retournons à v_n nous avons $v_n\le 1+v_n=(1+w_n)^{1/\alpha}$, et choisissons

$$d=p^*\alpha=\frac{(p-1-Q)p^*r'}{pr'-p^*}=Nr(p-1-Q)/(N-pr).$$

et nous conclurons que (v_n^d) est bornée dans $L^1(\Omega)$. Maintenant, soit $\sigma = rd/(rQ+d)$. Il est facile de voir que $1 < \sigma < r$, donc par l'hypothèse sur g et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega f^\sigma(1+g(v_n))^{(p-1)\sigma} &\leq M^\sigma \int_\Omega f^\sigma(1+v_n)^{Q\sigma} \\ &\leq M^\sigma(\int_\Omega f^r)^{\sigma/r}(\int_\Omega (1+v_n)^d)^{(r-\sigma)/r}\end{aligned}$$

Il en résulte que $F_n = T_n((f(x)(1+g(v_n))^{p-1})$ est bornée dans $L^\sigma(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite notée encore v_n qui converge presque partout vers une fonction mesurable v, voir la remarque 2.2.13. Par le lemme de Fatou, la fonction $F = ((f(x)(1+g(v))^{p-1}) \in L^\sigma(\Omega)$. En utilisant le théorème de la convergence de Vitali, il est facile de montrer que F_n converge fortement vers F dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s \in [1, \sigma)$. D'après la remarque (2.2.19), il existe une sous-suite (v_n) et une fonction mesurable w telle que

$$v_n \to w \qquad \text{presque partout dans } \Omega,$$

$$\nabla v_n \to \nabla w \qquad \text{presque partout dans } \Omega,$$

avec w est une solution renormalisée de $-\Delta_p w = F$. Mais (v_n) converge presque partout dans Ω vers v. Alors $w = v$.

En plus, nous distinguons les deux cas suivants :

•<u>Cas 1 :</u> Si $(Q+1)r' \leq p^*$ alors $\beta \leq 0$. Dans ce cas $|\nabla v_n| \leq |\nabla w_n|$, par (4.3.8). Alors (v_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et par suite $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

•<u>Cas 2 :</u> Si $(Q+1)r' > p^*$, alors $\beta > 0$, et considérons $\theta = \frac{dp}{\beta+d} < p$. Par (4.3.8) et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v_n|^\theta \, dx &= \int_\Omega |\nabla w_n|^\theta \, (1+v_n)^{\beta\theta/p} \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla w_n|^p \, dx\right)^{p/\theta} \left(\int_\Omega (1+v_n)^d dx\right)^{\beta\theta/dp};\end{aligned}$$

donc $(|\nabla v_n|^\theta)$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. Par le lemme de Fatou, on obtient $|\nabla v|^\theta \in L^1(\Omega)$, car le gradient converge presque partout. ■

Remarque 4.3.9 *(i) Nous allons voir dans le* ***chapitre 6****, par le théorème 6.1.1 que $\lambda_r = \infty$ dans une situation beaucoup* ***plus générale****, où nous donnons des résultats d'existence pour une non-linéarité non nécessairement positive avec une mesure de Radon quelconque. Comme ici, le fait que $\lambda_r = \infty$ sera montré dans le cas sous-linéaire.*

(ii) La régularité de la solution construite dans la proposition 4.3.8 est un peu plus forte que celle prévue par (vi) de la proposition 2.3.4 . Nous ne savons pas si toute solution de ce problème a la même régularité.

- **Cas** $Q \in [p-1, Q_1)$

Notre dernier résultat de ce chapitre donne une réponse à la question (2) dans le cas où la fonction g est **sur-linéaire**, c'est à dire g satisfait (4.1.4) avec $Q \in [p-1, Q_1)$; et sans imposer une hypothèse de convexité sur g. C'est une conséquence directe du résultat de régularité de la proposition 2.3.4 :

Proposition 4.3.10 *Supposons que g est une fonction continue positive sur $[0, \infty)$ satisfaisant (4.1.4) avec $Q \in [p-1, Q_1)$ et $f \in L^r(\Omega)$ avec $Qr' < Q_1$.*

Alors toute solution renormalisée de $(P_{v,\lambda})$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Donc $\lambda_b = \lambda^* = \lambda_r$.

Remarque 4.3.11 *En particulier quand $p = N$, si g satisfait (4.1.4) pour un certain $Q \geq N-1$ et $f \in L^r(\Omega), r > 1$, alors $\lambda_b = \lambda^* = \lambda_r$.*

Bibliographie

[1] Abdel Hamid H., Bidaut-Véron M.F., *On the connection between two quasilinear elliptic problems with source terms of order* 0 *or* 1*,* Accepté dans Communications in Contemporary Mathematics.

[2] Brezis H., Cazenave T., Martel Y., and Ramiandrisoa A., *Blow-up for* $u_t - \Delta u = g(u)$ *revisited,* Adv. Diff. Eq. 1 (1996), 73-90.

[3] Porretta A. and Segura de León S., *Nonlinear elliptic equations having a gradient term with natural growth,* J. Math. Pures Appl. 85 (2006), 465-492.

[4] Leray J. and Lions J.L., *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder,* Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 97-107.

Chapitre 5

Existence d'une deuxième solution et solution extrémale

Sommaire

5.1 Introduction

Après avoir discuté dans le chapitre précédent de l'intervalle des λ pour lesquels on a l'existence de solution du problème $(P_{v,\lambda})$, nous poursuivons notre étude des questions classiques qui se posent pour ce type de problème. Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux deux questions suivantes :

Question 1 : Quand-est-ce qu'il existe une deuxième solution variationnelle bornée du problème $(P_{v,\lambda})$?

Question 2 : Lorsque $\Lambda = \infty$ et $\lambda_b < \infty$, que peut-on dire sur la régularité de la fonction extrémale définie par

$$v^* = \lim_{\lambda \nearrow \lambda_b} \underline{v}_\lambda,$$

où $\underline{v}_\lambda$ est la solution minimale de $(P_{v,\lambda})$? Est-elle une solution du problème limite (P_{v,λ_b}), et dans quel sens ? Est-t-elle une solution variationnelle, est-t-elle bornée ?

Supposons que $\Lambda = \infty$. **Dans tout ce chapitre**, nous supposons que g satisfait

$$g \in C^1([0,\infty)), g(0) = 0 \text{ et } g \text{ est croissante }, g \not\equiv 0. \tag{5.1.1}$$

Dans la plupart de nos résultats nous allons supposer une hypothèse de croissance sur $g(s)/s$:

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty. \tag{5.1.2}$$

Cette dernière condition exprime que g est **sur-linéaire** à l'infini. Nous établissons d'abord un résultat de multiplicité en supposant en plus que g est sous-critique par rapport à l'exposant de Sobolev :

$$\limsup_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{g(\tau)^{p-1}}{\tau^Q} < \infty, \qquad \text{pour un certain } Q \in (p-1, Q^*)\,, \tag{5.1.3}$$

où Q^* est définie par

$$Q^* = p^* - 1 = \frac{N(p-1)+p}{N-p}, \qquad (Q^* = \infty \text{ si } p = N).$$

Par ailleurs nous donnons des résultats d'existence et de régularité de la solution extrémale, et en particulier lorsque g satisfait (5.1.3) avec $Q \in (p-1, Q_1)$ ou $Q \in (p-1, Q^*)$, où Q_1 est défini par (4.1.5). Pour chacun des résultats, les hypothèses sur f sont adaptées par rapport à celles sur g ; f satisfait au moins

$$f \in L^1(\Omega) \qquad f \geq 0,\ f \not\equiv 0. \tag{5.1.4}$$

Le plan du chapitre est le suivant : Dans **la section 5.3**, nous allons montrer le théorème de multiplicité suivant sous des hypothèses de convexité sur g ou sous la condition bien connue d'Ambrosetti-Rabinowitz

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} = k > p, \tag{5.1.5}$$

où φ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = (1 + g(t^+))^{p-1}, \tag{5.1.6}$$

et Φ est une primitive de φ :

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds = \int_0^t (1 + g(s^+))^{p-1}ds. \tag{5.1.7}$$

Théorème 5.1.1 *Soit g satisfaisant (5.1.1), (5.1.2) et la condition de croissance polynomiale (5.1.3) avec $Q < Q^*$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $(Q+1)r' < p^*$. Alors*

(i) Si g est convexe au voisinage de ∞, alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda < \lambda_0$, il existe au moins ***deux solutions*** *$v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de $(P_{v,\lambda})$.*

(ii) Si $p = 2$ et g est convexe, ou si g satisfait la condition d' Ambrosetti-Rabinowitz (5.1.5) et $f \in L^\infty(\Omega)$, alors ***pour tout*** *$\lambda \in (0, \lambda_b)$ il existe au moins deux solutions $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de $(P_{v,\lambda})$.*

Dans la **section 5.4**, sous des hypothèses de convexité sur g nous étendons certains résultats de [18] , [22] et [1], par le théorème 5.4.10, les propositions 5.4.11, 5.4.15 et 5.4.16. En particulier, nous montrons

Théorème 5.1.2 *Supposons que g satisfait (5.1.1), (5.1.2) et g est convexe au voisinage de ∞ ; et $f \in L^r(\Omega), r > N/p$. Alors la fonction extrémale $v^* = \lim_{\lambda \nearrow \lambda^*} \underline{v}_\lambda$ est une solution* ***renormalisée*** *de (P_{v,λ^*}). De plus*

(i) Si $N < p(1+p')/(1+p'/r)$, alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Si $N < pp'/(1+1/(p-1)r)$, alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

(ii) Si g satisfait (5.1.3) avec $Q < Q_1$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $Qr' < Q_1$, ou si (5.1.3) est satisfaite avec $Q < Q^*$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $(Q+1)r' < p^*$, alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Sans hypothèses de convexité sur g, nous obtenons un résultat d'existence locale par la proposition 5.4.6, voir le théorème 5.4.6. La démonstration est basée sur un résultat de régularité de [3] et l'inégalité de Harnack faible. Nous montrons dans la proposition 5.4.8 un résultat global pour v^* sous la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz (5.1.5).

5.2 Outils techniques

5.2.1 Fonctionnelle d'Euler

Pour établir la majorité des résultats de ce chapitre, nous utilisons une fonctionnelle d'Euler J_λ associé au problème $(P_{v,\lambda})$ et quelques propriétés importantes de cette fonctionnelle données dans [7].

Par le principe du maximum, le problème $(P_{v,\lambda})$ est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(x)\varphi(v) = \lambda f(x)(1+g(v^+))^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

où φ est définie par (5.1.6).
Lorsque g est seulement continue sur $[0,\infty)$ alors φ est continue, donc $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, où Φ est définie par (5.1.7).
Pour tout $f \in L^1(\Omega)$ et tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $f\Phi(v) \in L^1(\Omega)$, nous posons

$$J_\lambda(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx - \lambda \int_\Omega f\Phi(v)dx. \tag{5.2.2}$$

En particulier la fonctionnelle J_λ est définie sur $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Dans la suite, nous donnons quelques propriétés importantes de J_λ . Tout d'abord, mentionnons un résultat donné dans [7, proposition 2.1] qui caractérise en particulier l'énergie de la solution minimale.

Proposition 5.2.1 ([7]) *Supposons que g satisfait (5.1.1) et f satisfait (5.1.4). Soit $\lambda > 0$ tel que il existe une sur-solution $\bar{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de $(P_{v,\lambda})$. Alors J_λ est définie sur*

$$\mathcal{K}_{\bar{v}} = \left\{ v \in W_0^{1,p}(\Omega) : 0 \le v \le \bar{v} \right\}$$

et atteint son minimum sur $\mathcal{K}_{\bar{v}}$ en un certain point v qui est une solution de $(P_{v,\lambda})$. En particulier si $0 < \lambda < \lambda_b$, alors

$$J_\lambda(\underline{v}_\lambda) = \min_{\mathcal{K}_{\underline{v}_\lambda}} J_\lambda(v) \le 0.$$

Remarque 5.2.2 *En fait nous avons $J_\lambda(\underline{v}_\lambda) < 0$. En effet si $J_\lambda(\underline{v}_\lambda) = 0$, alors pour tout $t \in (0,1)$, $J_\lambda(t\underline{v}_\lambda) \ge 0$, donc*

$$t^p \int_\Omega |\nabla \underline{v}_\lambda|^p \, dx \ge p\lambda \int_\Omega f\Phi(t\underline{v}_\lambda)dx \ge p\lambda t \int_\Omega f\underline{v}_\lambda dx$$

donc $f\underline{v}_\lambda = 0$, et $f \not\equiv 0$, donc $\underline{v}_\lambda = 0$ sur $\{f > 0\}$, ce qui contredit le fait que $\underline{v}_\lambda > 0$ par le principe du maximum fort.

Dans la proposition 5.4.11 nous montrons des résultats de régularité pour la solution extremale v^*. Dans la démonstration nous utilisons le fait que la solution minimale $\underline{v}_\lambda$ est semi-stable, voir [7, Définition 1.1] et [7, Proposition 2.2]. Par [7], la définition d'une fonction semi-stable est donnée pour toute fonction $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Nous étendons la définition à des fonctions moins régulières :

Définition 5.2.3 *Une solution renormalisée v du problème $(P_{v,\lambda})$ est dite* ***semi-stable*** *si la "dérivée seconde de J_λ est positive", dans le sens que la forme quadratique $J''_\lambda(v)$ définie par*

$$J''_\lambda(v)(\psi,\psi) := \int_{\{\nabla v\neq 0\}} |\nabla v|^{p-2}\left\{(p-2)(\frac{\nabla v.\nabla\psi}{|\nabla v|})^2 + |\nabla\psi|^2\right\}dx$$
$$-(p-1)\lambda\int_\Omega f(1+g(v))^{p-2}g'(v)\psi^2 dx, \qquad (5.2.3)$$

soit positive pour tout $\psi \in \mathcal{A}_v$ où

$$\mathcal{A}_v = \mathcal{D}(\Omega) \qquad \text{si } p \geq 2;$$

et pour $1 < p < 2$,

$$\mathcal{A}_v = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \exists C > 0 \text{ tel que } |\psi| \leq Cv \text{ et } |\nabla\psi| \leq C|\nabla v| \text{ dans } \Omega\}.$$

Cette définition a un sens puisque l'intégrale $I(v,\psi) = J''_\lambda(v)(\psi,\psi)$ est bien définie. En effet nous avons $I(v,\psi) \geq 0$ et

$$I(v,\psi) \leq (p-1)\int_{\{\nabla v\neq 0\}} |\nabla v|^{p-2}|\nabla\psi|^2 dx$$
$$= (p-1)(\int_{\{|\nabla v|>1\}} |\nabla v|^{p-2}|\nabla\psi|^2 dx + \int_{\{0<|\nabla v|\leq 1\}} |\nabla v|^{p-2}|\nabla\psi|^2 dx)$$

donc si $p \geq 2$, alors

$$I(v,\psi) \leq (p-1)(\int_{\{|\nabla v|>1\}} |\nabla v|^{p-1}|\nabla\psi|^2 dx + \int_{\{0<|\nabla v|\leq 1\}} |\nabla\psi|^2 dx).$$

Si $1 < p < 2$ alors

$$I(v,\psi) \leq (p-1)(\int_{\{|\nabla v|>1\}} |\nabla\psi|^2 dx + C\int_{\{0<|\nabla v|\leq 1\}} |\nabla v|^{p-1}|\nabla\psi| dx).$$

donc $I(v,\psi) < \infty$ puisque $|\nabla v|^{p-1} \in L^1(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Quand $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, (5.2.3) est valable pour tout $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, satisfaisant $|\psi| \leq Cv$ et $|\nabla\psi| \leq C|\nabla v|$ dans Ω, pour un certain $C > 0$ lorsque $p < 2$.

Remarque 5.2.4 *La notation $J''_\lambda(v)$ ne veut pas dire que J_λ est de classe C^2 en v.*

Maintenant, nous donnons quelques remarques sur la première et la seconde variation de la fonctionnelle J_λ.

Lemme 5.2.5 *Supposons g une fonction continue sur $[0,\infty)$ satisfaisant (5.1.3) avec $Q < Q^*$ et que $f \in L^r(\Omega)$ telle que $(Q+1)r' < p^*$. Alors la fonctionnelle définie par (5.2.2) est de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec*

$$J'_\lambda(v)(w) = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v.\nabla w - \lambda \int_\Omega f\varphi(v)w\,dx, \tag{5.2.4}$$

pour tout $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. On peut facilement adapter les démonstrations classiques pour montrer que la fonctionnelle

$$v \to F(v) = \int_\Omega f\Phi(v)dx, \tag{5.2.5}$$

est de classe C^1 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. ∎

Remarque 5.2.6 *Si g est de classe C^1, alors φ est de même classe si et seulement si $g'(0) = 0$. Par conséquent, pour que la fonctionnelle F définie par (5.2.5) soit de classe C^2 sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ il faut au moins supposer que g est de classe C^1 avec $g'(0) = 0$.*

Par le [25, corollaire 17.8], nous déduisons le lemme suivant

Lemme 5.2.7 *Soit g une fonction de classe C^1 sur $[0,\infty)$ avec $g'(0) = 0$. Supposons que $p = 2$, $f \in L^\infty(\Omega)$ et que g satisfait (5.1.3) avec $Q < Q^*$. Alors la fonctionnelle J_λ est de classe C^2 sur $H_0^1(\Omega)$. En notant par $\bar g$ le prolongement par 0 de g sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $v, w, \psi \in H_0^1(\Omega)$, nous avons $J''_\lambda(v)(w,\psi)$ égale à*

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla\psi\,dx - \lambda \int_\Omega f\,\bar g(v)w\psi\,dx \tag{5.2.6}$$

Preuve. Puisque g satisfait (5.1.3) alors $g(t) \le c(1+t^Q)$, pour tout $t \ge 0$, avec $Q < 2^*-1 = (N+2)/(N-2)$. Puisque g est convexe sur $[0,\infty)$ alors $g(2t) \ge g(t)+tg'(t) \ge tg'(t)$, d'où $g'(t) \le C_1(1+t^{Q-1}) \le C(1+t^{4/(N-2)})$ car $Q-1 < \frac{N+2}{N-2} - 1 = \frac{4}{N-2}$. Donc

$$|\bar g'(t)| = \bar g'(t) \le C(1+t^{4/(N-2)}), \tag{5.2.7}$$

et on conclut en appliquant le [25, corollaire 17.8]. ∎

Finalement , nous énonçons un résultat important donné dans [16] que nous allons utiliser dans la démonstration de l'existence d'une deuxième solution bornée du problème $(P_{v,\lambda})$ pour λ petit :

Théorème 5.2.8 *Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et soit $J \subset \mathbb{R}^+$ un intervalle. Nous considérons une famille $(I_\lambda)_{\lambda\in J}$ de fonctionnelles de classe C^1 sur X de la forme*

$$I_\lambda(u) = A(u) - \lambda\,B(u),\ \forall\lambda \in J$$

où $B(u) \geq 0$, $\forall\, u \in X$ *et telle que* $A(u) \to +\infty$ *ou bien* $B(u) \to +\infty$ *lorsque* $\|u\| \to \infty$. *Supposons qu'il existe deux points* $(v_1,\, v_2)$ *dans* X *telles que, en posant*

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0,1]\,, W_0^{1,p}(\Omega)) : \gamma(0) = v_1, \gamma(1) = v_2 \right\}$$

la condition suivante soit satisfaite pour tout $\lambda \in J$

$$c_\lambda := \inf_{\theta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\theta(t)) > \max(I_\lambda(v_1), I_\lambda(v_2)).$$

Alors, pour presque $\lambda \in J$, *il existe une suite* $(v_n) \subset X$ *telle que*

(i) (v_n) *est bornée dans* X,

(ii) $I_\lambda(v_n) \to c_\lambda$,

(iii) $I'_\lambda(v_n) \to 0$ *dans le dual* X^{-1} *de* X.

5.2.2 Fonctions liées à g et leurs comportements asymptotiques

Dans cette sous-section nous définissons quelques fonctions liées à g et nous étudions leur comportement asymptotique lorsque g est convexe à l'infini, voir le lemme 5.2.9. Notons que la fonction h définie par (5.2.9) est introduite dans [18]. Dans la proposition 5.2.10 nous donnons un résultat simple mais très utile dans notre démonstration de l'existence globale du théorème 5.4.10 et le résultat de multiplicité du théorème 5.1.1.

Lemme 5.2.9 *Supposons (5.1.1) et (5.1.2) avec* g *convexe sur* $[A, \infty)$ *pour un certain* $A \geq 0$. *Pour tout* $t \geq 0$, *soit*

$$j(t) = tg'(t) - g(t) = \int_0^t (g'(t) - g'(s))ds, \qquad \mathcal{J}(t) = t\varphi(t) - p\Phi(t), \tag{5.2.8}$$

$$h(t) = \int_0^t g'(s)(g'(t) - g'(s))ds = g(t)g'(t) - \int_0^t g'^2(s)ds. \tag{5.2.9}$$

Alors

$$\lim_{t\to\infty} j(t) = \infty, \tag{5.2.10}$$

$$\lim_{t\to\infty} j(t)/g'(t) = \infty, \tag{5.2.11}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{J}(t)/\varphi(t) = \infty, \tag{5.2.12}$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t)/j(t) = \infty. \tag{5.2.13}$$

Preuve. Par l'hypothèse (5.1.2) et la convexité, on a

$$\lim_{t\to\infty} g'(t) = \infty$$

(i) Puisque g est est convexe sur $[A, \infty)$, alors g' est croissante sur $[A, \infty)$. Pour tout $t \geq \tau \geq A$ nous avons

$$\begin{aligned} j(t) - j(\tau) &= \int_0^\tau (g'(t) - g'(s))ds + \int_\tau^t (g'(t) - g'(s))ds - \int_0^\tau (g'(\tau) - g'(s))ds \\ &= \tau(g'(t) - g'(\tau)) + \int_\tau^t (g'(t) - g'(s))ds \geq 0, \end{aligned}$$

alors j est croissante sur $[A, \infty)$.
Donc j admet une limite L qui appartient à $(-\infty, \infty]$. Montrons que $L = \infty$; en effet si L est finie, alors il existe t_0 tel que $tg'(t) \leq g(t) + |L| + 1$ pour $t \geq t_0$, donc

$$\left(\frac{g(t) + |L| + 1}{t}\right)' = \frac{tg'(t) - g(t) + |L| + 1}{t^2} \leq 0$$

pour $t \geq t_0$, donc $(g(t) + |L| + 1)/t$ est décroissante sur $[t_0, \infty)$, ce qui contredit (5.1.2). Donc

$$\lim_{t\to\infty} j(t) = \infty.$$

Dans le cas où $g \in C^2((0, \infty))$ et $g''(t) > 0$ sur $[A, \infty)$: par la règle de l'Hôpital,

$$\lim_{t\to\infty} j(t)/g'(t) = \lim_{t\to\infty} j'(t)/g''(t) = \lim_{t\to\infty} t = \infty.$$

Dans le cas général g est convexe pour $t \geq A$, donc g' est croissante sur $[A, \infty)$. Puisque $\lim\limits_{t\to\infty} g'(t) = \infty$ alors pour tout $K > 0$, il existe $t_K > A + 2K$ tel que $g'(t) \geq 2g'(A + 2K)$ pour $t \geq t_K$. Alors pour $t \geq t_K$,

$$\begin{aligned} j(t) &= \int_0^t (g'(t) - g'(s))ds = \int_0^A (g'(t) - g'(s))ds + \int_A^t (g'(t) - g'(s))ds \\ &= Ag'(t) - g(A) + \int_A^{A+2K} (g'(t) - g'(s))ds + \int_{A+2K}^t (g'(t) - g'(s))ds \\ &\geq -g(A) + \int_A^{A+2K} (g'(t) - g'(A + 2K))ds \qquad \text{car } g' \geq 0 \text{ et croissante} \\ &= -g(A) + 2K(g'(t) - g'(A + 2K)) \geq -g(A) + Kg'(t), \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{t\to\infty} j(t)/g'(t) = \infty$.
Maintenant, nous avons pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(t) &= \varphi(t) + t\varphi'(t) - p\Phi'(t) \\ &= (1 + g(t))^{p-1} + t(p - 1)(1 + g(t))^{p-2} g'(t) - p(1 + g(t))^{p-1} \\ &= (p - 1)(1 + g(t))^{p-2}(tg'(t) - (1 + g(t))). \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{J}'(t) = (p-1)(1+g(t))^{p-2}(j(t)-1) = \varphi'(t)(j(t)-1)/g'(t) \tag{5.2.14}$$

par suite $\lim\limits_{t\to\infty} \mathcal{J}'(t)/\varphi'(t) = \infty$. Mais $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} \varphi(t) = \infty$, donc par la règle de l'Hôpital nous obtenons

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{J}(t)/\varphi(t) = \infty.$$

(ii) Maintenant nous montrons (5.2.13). Dans le cas où $g \in C^2\left((0,\infty)\right)$ et $g''(t) > 0$, nous obtenons $h(t) = \displaystyle\int_0^t g(s)g''(s)ds$, et par la règle de l'Hôpital,

$$\lim_{t\to\infty} h(t)/j(t) = \lim_{t\to\infty} h'(t)/tg''(t) = \lim_{t\to\infty} g(t)/t = \infty.$$

Dans le cas général, pour tout $C > 0$, il existe $A_1 > A$ tel que that $g'(s) \geq 2C$, pour $s \geq A_1$ et il existe $B > 5A_1$ tel que $g'(t) \geq 2g'(5A_1)$ pour $t \geq B$. Pour tout $t \geq 0$, nous avons

$$h(t) - Cj(t) = \int_0^t (g'(s)-C)(g'(t)-g'(s))ds = I_1 + I_2 + I_3,$$

où

$$I_1 = \int_0^{A_1} (g'(s)-C)(g'(t)-g'(s))ds, \qquad I_2 = \int_{A_1}^{5A_1} (g'(s)-C)(g'(t)-g'(s))ds$$

$$I_3 = \int_{5A_1}^{t} (g'(s)-C)(g'(t)-g'(s))ds.$$

Pour $t \geq B$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
1) I_1 &= \int_0^{A_1} g'(s)g'(t)ds - \int_0^{A_1} (g'(s))^2 ds - C\int_0^{A_1} g'(t)ds + C\int_0^{A_1} g'(s)ds \\
&= g'(t)g(A_1) - \int_0^{A_1} (g'(s))^2 ds - Cg'(t)A_1 + Cg(A_1) \\
&\geq -\int_0^{A_1} (g'(s))^2 ds - CA_1 g'(t) \qquad \text{car } g \text{ est positive et croissante.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) I_2 &\geq C\int_{A_1}^{5A_1} (g'(t)-g'(s))ds \\
&\geq C\int_{A_1}^{5A_1} (g'(t)-g'(5A_1))ds \qquad \text{car } g' \text{ est croissante sur } [A,\infty) \\
&= 4CA_1(g'(t)-g'(5A_1)) \geq 2CA_1 g'(t).
\end{aligned}$$

3) $I_3 \geq C \displaystyle\int_{5A_1}^{t} (g'(t) - g'(s))ds \geq 0$ car g' est croissante sur $[A, \infty)$.

Il en résulte $h(t) - Cj(t) \geq -\displaystyle\int_0^{A_1} (g'(s))^2 ds + CA_1 g'(t)$ pour tout $t \geq B$. Mais $\lim\limits_{t\to\infty} g'(t) = \infty$, alors $h(t) - Cj(t) \geq 0$ pour t suffisamment grand. Donc $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)/j(t) = \infty$. ■

Le résultat suivant sera utilisé dans les deux sections suivantes pour établir la multiplicité par le théorème 5.1.1 et l'existence globale du théorème 5.4.10. La preuve est **simple et nouvelle**, nous utilisons seulement la fonction $\mathcal{J}$ définie par (5.2.8). Notons que la preuve donnée dans [1] pour $p = 2$ ne peut pas être étendue, car elle utilise une fonction propre ϕ_1 du *Laplacien* et le fait que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \phi_1 dx = \int_\Omega v(-\Delta\phi_1)dx \qquad \text{pour tout } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Proposition 5.2.10 *Supposons(5.1.1) et (5.1.2) avec g convexe à l'infini, et* $f \in L^1(\Omega)$. *Soit* (λ_n) *une suite de réels strictement positive tels que* $\liminf \lambda_n = \lambda > 0$, *et* (v_n) *une suite de solutions de* (P_{v,λ_n}) *, tel que* $v_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $f\Phi(v_n) \in L^1(\Omega)$, *et* $J_{\lambda_n}(v_n) \leq c \in \mathbb{R}$.

Alors $(\Delta_p v_n)$ *est bornée dans* $L^1(\Omega)$.

Preuve. Considérons v_n comme fonction test dans (P_{v,λ_n}) nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx = \lambda_n \int_\Omega f(1 + g(v_n))^{p-1} v_n dx; \tag{5.2.15}$$

donc

$$\begin{aligned} p\, J_{\lambda_n}(v_n) &= \int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx - p\lambda_n \int_\Omega f\Phi(v_n)dx \\ &= \lambda_n \int_\Omega f((1 + g(v_n))^{p-1} v_n - p\Phi(v_n))dx \\ &= \lambda_n \int_\Omega f(v_n\varphi(v_n) - p\Phi(v_n))dx = \lambda_n \int_\Omega f\mathcal{J}(v_n)dx, \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

où $\mathcal{J}$ est définie par (5.2.8). Donc $\displaystyle\int_\Omega f\mathcal{J}(v_n)dx = \lambda_n^{-1} p\, J_{\lambda_n}(v_n) \leq \lambda^{-1} p\, c$. Par (5.2.12) du lemme 5.2.9, il existe $B > 0$ tel que $\mathcal{J}(t) \geq \varphi(t)$ pour tout $t \geq B$. Par conséquent

$$\int_\Omega f\varphi(v_n)dx = \int_{\{v_n<B\}} f\varphi(v_n)dx + \int_{\{v_n \geq B\}} f\varphi(v_n)dx \leq \varphi(B) \int_\Omega f\, dx + \lambda^{-1} p\, c.$$

Alors $\displaystyle\int_\Omega f\varphi(v_n)dx$ est bornée, c'est à dire $(\Delta_p v_n)$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. ■

5.3 Existence d'une deuxième solution variationnelle bornée.

Cette section est consacrée à la démonstration de la multiplicité du théorème 5.1.1. Nous utilisons la fonction d'Euler J_λ associée à $(P_{v,\lambda})$. Nous rencontrons les deux difficultées suivantes :

1) Pour λ petit, J_λ a la géométrie de col au voisinage de 0, mais la fonction g peut être légèrement sur-linéaire c'est à dire elle croit plus vite qu'une droite mais n'est pas minorée par une puissance s^q avec $q > 1$. Et, dans ce cas, les suites de Palais-Smale ne sont pas nécessairement bornées dans $W_0^{1,p}(\Omega)$; alors nous utilisons le théorème 5.2.8 donné par [16] pour montrer qu'il existe une suite (λ_n) convergente vers λ, telle que J_{λ_n} a un point critique v_n, et nous déduisons que (v_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ d'après notre résultat de la proposition 5.3.1.

2) Pour λ grand, sous les mêmes hypothèses sur f et g, il n'est pas garanti que la fonctionnelle J_λ ait la géométrie de col au voisinage de la solution minimale $\underline{v}_\lambda$ de $(P_{v,\lambda})$. Pour assurer cette géométrie, nous allons imposer des hypothèses plus fortes sur f et g. Précisement, dans le cas $p \neq 2$ et g n'est pas nécéssairement convexe, nous supposons que $f \in L^\infty(\Omega)$ et g satisfait la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz (5.1.5).

Nous commencons par le résultat clé suivant :

Proposition 5.3.1 *Supposons(5.1.1), (5.1.2) et (5.1.3), g convexe à l'infini, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $(Q+1)r' < p^*$. Soit (λ_n) une suite de réels strictement positive tels que $\lim \lambda_n = \lambda > 0$, et (v_n) une suite de solutions de (P_{v,λ_n}) tel que $v_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, et $J_{\lambda_n}(v_n) \leq c \in \mathbb{R}$.*

Alors (v_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. Par (5.2.16) nous avons

$$pJ_{\lambda_n}(v_n) = \lambda_n \int_\Omega f(v_n\varphi(v_n) - p\Phi(v_n))dx = \lambda_n \int_\Omega f\mathcal{J}(v_n)dx,$$

où $\mathcal{J}$ est définie par (5.2.8). Moyennant une méthode de [17], nous allons montrer par contradiction, que la suite (v_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Supposons que (v_n) n'est pas bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors il existe une sous-suite, indicée encore par n, telle que $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \infty$. Considérons

$$w_n = \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{-1} v_n.$$

Donc $\|w_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1$, alors il existe une sous-suite (w_n) qui converge vers une fonction w faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et fortement dans $L^k(\Omega)$, pour tout $k < p^*$. Pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$I_n = \int_\Omega |\nabla w_n|^{p-2} \nabla w_n \nabla\zeta dx = \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{1-p} \int_\Omega f(1+g(v_n))^{p-1}\zeta dx.$$

D'après la proposition 5.2.10, $(f(1+g(v_n))^{p-1})$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. Alors I_n tend vers 0. D'autre part I_n tends vers $\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla \zeta dx$. Donc $-\Delta_p w = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, par suite $w = 0$.
Maintenant nous définissons

$$t_n = \inf\left\{t \in [0,1] : J_{\lambda_n}(tv_n) = \max_{s\in[0,1]} J_{\lambda_n}(sv_n)\right\}.$$

Soit $z_n = t_n v_n$. Nous obtenons successivement deux conclusions contradictoires :

(1) $\lim_{n\to\infty} J_{\lambda_n}(z_n) = \infty$.

(2) $J_{\lambda_n}(z_n)$ est bornée.

En effet :

1) Supposons que $\limsup\limits_{n\to\infty} J_{\lambda_n}(z_n) = M < \infty$. Pour un $K > 0$ donné, posons $u_n = Kw_n = K\,\|v_n\|^{-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} v_n$. Pour n grand $0 < K\,\|v_n\|^{-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1$, car $\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \infty$. Alors pour n suffisamment grand,

$$J_{\lambda_n}(u_n) \leq \max_{s\in[0,1]} J_{\lambda_n}(sv_n) = J_{\lambda_n}(z_n) \leq M+1 \tag{5.3.1}$$

D'autre part $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f\Phi(u_n)dx = 0$. En effet, d'après l'hypothèse (5.1.3) il existe $C > 0$ tel que, pour tout $s \geq 0$, $(1+g(s))^{p-1} \leq C(1+s)^Q$. Donc $\Phi(s) = \displaystyle\int_0^s (1+g(\tau))^{p-1}d\tau \leq C\int_0^s (1+\tau)^Q d\tau = C(Q+1)^{-1}((1+s)^{Q+1}-1)$ pour $s \geq 0$. Par suite

$$0 \leq \int_\Omega f\Phi(u_n)dx \leq C\int_\Omega f((1+u_n)^{Q+1}-1)dx = J_n$$

et puisque $f \in L^r(\Omega)$ et $u_n = Kw_n$ converge fortement dans $L^{(Q+1)r'}(\Omega)$, car $(Q+1)r' < p^*$; alors J_n tend vers 0, en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f\Phi(u_n)dx = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} J_{\lambda_n}(u_n) = K^p/p$ par (5.2.2). En prenant K tel que $K^p/p > M+1$, nous obtenons une contradiction avec (5.3.1). Donc on obtient (1).

2) Comme conséquence de (1) nous pouvons facilement conclure que $t_n \neq 0$ et $t_n \neq 1$ pour n grand. En effet :

• Par (1), pour n grand $J_{\lambda_n}(z_n) > 0$ donc $t_n \neq 0$, car $J_{\lambda_n}(0) = 0$.

• Par hypothèse on a $J_{\lambda_n}(v_n) \leq c$ et encore par (1) on a $J_{\lambda_n}(z_n) > c$, pour n grand. Si $t_n = 1$ pour un n grand, alors $c < J_{\lambda_n}(z_n) = J_{\lambda_n}(v_n) \leq c$, ce qui est impossible.
Alors $t_n \in (0,1)$ pour n suffisamment grand. Puisque la fonction

$$t \in [0,1] \longrightarrow tv_n \longrightarrow J_{\lambda_n}(tv_n)$$

atteint son maximum en $t_n \in (0,1)$, car $J_{\lambda_n}(z_n) = \max_{t\in[0,1]} J_{\lambda_n}(tv_n)$, alors sa dérivée est nulle en $t = t_n$. Par le théorème de dérivation de fonction composée, nous trouvons que cette dérivée est égale à $J'_{\lambda_n}(z_n)(v_n)$. Donc $J'_{\lambda_n}(z_n)(v_n) = 0$. Par suite, en multipliant par t_n, la linéarité de $J'_{\lambda_n}(z_n)$ nous donne $J'_{\lambda_n}(z_n)(z_n) = 0$. Donc

$$J'_{\lambda_n}(z_n)(z_n) = \int_\Omega |\nabla z_n|^p \, dx - \lambda_n \int_\Omega f(1+g(z_n))^{p-1} z_n dx = 0,$$

et par suite

$$\lambda_n^{-1} p J_{\lambda_n}(z_n) = \int_\Omega f(z_n\varphi(z_n) - p\Phi(z_n))dx = \int_\Omega f\mathcal{J}(z_n)dx.$$

D'après (5.2.10) du lemme 5.2.9, il existe $B > 0$ tel que $j(s) - 1 > 0$ pour $s \geq B$, d'où $\mathcal{J}(B) \leq \mathcal{J}(t) \leq \mathcal{J}(\tau)$ pour tout $B \leq t \leq \tau$ par (5.2.14). De plus $z_n \leq v_n$ presque partout dans Ω, donc $\{z_n > B\} \subset \{v_n > B\}$, alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\mathcal{J}(z_n)dx &= \int_{\{z_n\leq B\}} f\mathcal{J}(z_n)dx + \int_{\{z_n>B\}} f\mathcal{J}(z_n)dx \\
&\leq C(B) + \int_{\{z_n>B\}} f\,\underbrace{(\mathcal{J}(z_n) + |\mathcal{J}(B)|)}_{\geq 0}\,dx \\
&\leq C(B) + \int_{\{v_n>B\}} f(\mathcal{J}(z_n) + |\mathcal{J}(B)|)dx \\
&\leq C(B) + \int_{\{v_n>B\}} f(\mathcal{J}(v_n) + |\mathcal{J}(B)|)dx \\
&\leq C_1(B) + \int_\Omega f\mathcal{J}(v_n)dx \leq C + \lambda_n^{-1}pc
\end{aligned}$$

donc $(J_{\lambda_n}(z_n))$ est bornée. Donc nous arrivons à montrer (1) et (2), ce qui est une contradiction. Alors (v_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Remarque 5.3.2 *Le résultat précédent nous servira aussi pour montrer que la solution extrémale est bornée sous l'hypothèse 5.1.3, voir la proposition 5.4.16.*

Preuve du théorème 5.1.1. Pour tout $\lambda \in (0, \lambda_b)$ il existe au moins une solution : la solution minimale bornée $\underline{v}_\lambda$, telle que $J_\lambda(\underline{v}_\lambda) < 0$, par la proposition 5.2.1 et la remarque 5.2.2.

(i) **Existence d'une deuxième solution pour λ suffisamment petit.**

Tout d'abord montrons qu'il existe un $\lambda_0 \in (0, \lambda_b)$ tel que pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$, J_λ a la géométrie de col au voisinage de $u_0 = 0$. Par (5.1.3), par un simple calcul il est facile de voir qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(t) \leq C(|t| + |t|^{Q+1}).$$

Donc, pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega))$, on obtient

$$J_\lambda(v) \geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx - \lambda C \left\| f \right\|_{L^r(\Omega)} (\left\| v \right\|_{L^{r'}(\Omega)} + \left\| v \right\|^{Q+1}_{L^{(Q+1)r'}(\Omega)})$$

par des inégalités de Hölder. Notons $\|v\| = \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ et utilisons les injections de Sobolev de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{r'}(\Omega)$ et $L^{(Q+1)r'}(\Omega)$, nous trouvons une nouvelle constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} J_\lambda(v) &\geq \frac{1}{p}\|v\|^p - \lambda C \|f\|_{L^r(\Omega)} (\|v\| + \|v\|^{Q+1}) \\ &\geq \|v\| (\|v\|^{p-1} (\frac{1}{p} - \lambda C \|f\|_{L^r(\Omega)} \|v\|^{Q-p+1}) - \lambda C \|f\|_{L^r(\Omega)}). \end{aligned}$$

Pour $\epsilon > 0$, soit $\lambda_0 = (\epsilon/p)^{Q+1-p}/(p+\epsilon)C\|f\|_{L^r(\Omega)}$. Soit $\lambda \in (0, \lambda_0)$ et $R_\lambda = ((p+\epsilon)\lambda C \|f\|_{L^r(\Omega)})^{-1/(Q+1-p)}$. Sur $\left\{ J_\lambda(v) : \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = R_\lambda \right\}$, un calcul simple montre que

$$\rho_0 = \|v\| (\|v\|^{p-1} (\frac{1}{p} - \lambda C \|f\|_{L^r(\Omega)} \|v\|^{Q-p+1}) - \lambda C \|f\|_{L^r(\Omega)}) > 0.$$

C'est à dire $\inf \left\{ J_\lambda(v) : \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = R_\lambda \right\} \geq \rho_0 > 0$.
D'autre part, pour une fonction $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ strictement positive, en utilisant (5.1.2) il est facile de montrer que $J_\lambda(tv)$ tend vers $-\infty$ lorsque $t \to +\infty$. Donc , pour t assez grand, la fonction $w_\lambda = tv$ satisfait $\|w_\lambda\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} > R_\lambda$ et $J_\lambda(w_\lambda) < 0$. On a encore $J_\lambda(0) = 0$. Alors J_λ a la géométrie de col au voisinage de 0, et en utilisant le lemme du gendarme nous obtenons :

$$c_\lambda = \inf_{\theta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\theta(t)) > 0 = \max(J_\lambda(0), J_\lambda(w_\lambda)), \tag{5.3.2}$$

où $\Gamma = \left\{ \theta \in C([0,1], W_0^{1,p}(\Omega)) : \theta(0) = 0, \theta(1) = w_\lambda \right\}$.
Soit $\lambda_1 \in (0, \lambda_0)$ fixé. Montrons l'existence d'une solution au niveau c_{λ_1}. Par continuité par rapport à λ, il existe $\delta > 0$ tel que la famille de fonctions $(J_\lambda)_{\lambda \in [\lambda_1(1-\delta), \lambda_1(1+\delta)]}$ satisfait encore la condition (5.3.2) :

$$c_\lambda = \inf_{\theta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\lambda(\theta(t)) > 0 = \max(J_\lambda(0), J_\lambda(w_{\lambda_1})). \tag{5.3.3}$$

Par [16, théorème 1.1], pour presque tout $\lambda \in [\lambda_1(1-\delta), \lambda_1(1+\delta]$, il existe une suite $(v_{\lambda,m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $W_0^{1,p}(\Omega)$, telle que

1) $(v_{\lambda,m})_m$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

2) $\lim\limits_{m\to\infty} J_\lambda(v_{\lambda,m}) = c_\lambda$.

3) $\lim_{m\to\infty} J'_\lambda(v_{\lambda,m}) = 0$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Par compacité de l'injection de Sobolev de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^{(Q+1)r'}(\Omega)$, car $(Q+1)r' < p^*$; on peut extraire une sous suite qui converge vers une fonction v_λ faiblement $W_0^{1,p}(\Omega)$ et fortement dans $L^{(Q+1)r'}(\Omega)$, et presque partout dans Ω. Par (5.2.4) :

$$-\Delta_p v_{\lambda,m} = J'_\lambda(v_{\lambda,m}) + \lambda f\varphi(v_{\lambda,m}) \qquad \text{dans } W^{-1,p'}(\Omega),$$

et par compacité

$$f\varphi(v_{\lambda,m}) \to f\varphi(v_\lambda) \qquad \text{fortement dans } W^{-1,p'}(\Omega),$$

donc, par 3)

$$-\Delta_p v_{\lambda,m} \to 0 + \lambda f\varphi(v_\lambda) = \lambda f\varphi(v_\lambda) \qquad \text{fortement dans } W^{-1,p'}(\Omega).$$

L'opérateur $(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ est continu, alors

$$v_{\lambda,m} \to (-\Delta_p)^{-1}(\lambda f\varphi(v_\lambda)) \qquad \text{fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega),$$

or $v_{\lambda,m} \to v_\lambda$ faiblement $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors

$$-\Delta_p v_\lambda = \lambda f\varphi(v_\lambda),$$

et $(v_{\lambda,m})_m$ converge vers v_λ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Et, par suite $J_\lambda(v_\lambda) = c_\lambda$ et $J'_\lambda(v_\lambda) = 0$. Par le principe du maximum v_λ est une solution positive de $(P_{v,\lambda})$.

Donc, nous avons montré que pour presque tout $\lambda \in [\lambda_1(1-\delta), \lambda_1(1+\delta)]$, il existe une solution v_λ qui est un point critique de J_λ au niveau c_λ.

Par conséquent, il existe une suite (λ_n) convergente vers λ_1 tel que il existe une solution $v_n = v_{\lambda_n}$ de (P_{v,λ_n}) avec $J_\lambda(v_n) = c_{\lambda_n}$. Alors, voir (5.2.16),

$$J_{\lambda_n}(v_n) = \lambda_n \int_\Omega f(v_n\varphi(v_n) - p\Phi(v_n))dx = c_{\lambda_n} \le c_\lambda + 1.$$

D'après la proposition 5.3.1, (v_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Donc, il existe une sous-suite (v_n) qui converge vers une fonction v faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et fortement dans $L^k(\Omega)$ pour tout $k < p^*$, et presque partout dans Ω. Alors

$$\lambda_n f(1+g(v_n))^{p-1} \to \lambda_1 f(1+g(v))^{p-1} \qquad \text{fortement dans } L^1(\Omega).$$

Par la remarque 2.2.19, v est une solution de (P_{v,λ_1}). Et $(f(v_n\varphi(v_n) - p\Phi(v_n)))$ converge vers $f(v\varphi(v) - p\Phi(v))$ fortement dans $L^1(\Omega)$ alors $(J_{\lambda_n}(v_n)) = (c_{\lambda_n})$ converge vers $J_\lambda(v)$, donc $J_\lambda(v) = c_\lambda$. Par suite, par la proposition 5.2.1 et (5.3.3) :

$$J_\lambda(\underline{v}_\lambda) \le 0 < c_\lambda = J_\lambda(v).$$

Donc $v \neq \underline{v}_\lambda$.

(*ii*) **Existence d'une deuxième solution pour $\lambda < \lambda_b$.**

Soit $\lambda_1 < \lambda_b$ fixé. Soit $\lambda_2 \in (\lambda_1, \lambda_b)$, et soient $\underline{v}_{\lambda_1}, \underline{v}_{\lambda_2}$ les solutions minimales bornées des problèmes (P_{v,λ_1}) et (P_{v,λ_2}) respectivement. Alors, d'après la proposition 5.2.1, J_{λ_1} atteint son minimum $\mathcal{K}_{\underline{v}_{\lambda_2}}$ en un point v_0 qui est une solution de (P_{v,λ_1}), car $\underline{v}_{\lambda_2}$ est une sur-solution pour (P_{v,λ_1}). Mais, $\underline{v}_{\lambda_1}$ est la solution minimale, donc $\underline{v}_{\lambda_1} \leq v_0 \leq \underline{v}_{\lambda_2}$.

$(ii)_1$:**Cas $p = 2$ et g est convexe**. Supposons que $p = 2$ et g est convexe. Notons que dans ce cas $\lambda_b = \lambda^*$. Nous montrons que $v_0 = \underline{v}_{\lambda_1}$ et elle est un minimum local strict de J_{λ_1}. En effet, d'après [7, proposition 2.2], $\underline{v}_{\lambda_2}$ est semi-stable, donc pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx \geq \lambda_2 \int_\Omega f g'(\underline{v}_{\lambda_2})\varphi^2 dx.$$

Puisque g est convexe alors g' est croissante, par suite $g'(\underline{v}_{\lambda_2}) \geq g'(\underline{v}_{\lambda_1})$ presque partout dans Ω. Donc

$$J''_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})(\varphi,\varphi) = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx - \lambda_1 \int_\Omega f g'(\underline{v}_{\lambda_1})\varphi^2 dx \geq (1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dx.$$

Notons $\delta = 1 - \lambda_1/\lambda_2$. Nous distinguons deux cas :

• Si $g'(0) = 0$ alors J_{λ_1} est de classe C^2, d'après le lemme 5.2.7. Pour tout $w, \varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\left|J''_{\lambda_1}(w)(\varphi,\varphi) - J''_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})(\varphi,\varphi)\right| \leq \left\|J''_{\lambda_1}(w) - J''_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})\right\|_{\mathcal{L}_2} \|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

où $\mathcal{L}_2$ est l'espace des formes bilinéaires continues sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Par continuité de $w \to J''_{\lambda_1}(w)$ de $H_0^1(\Omega)$ sur $\mathcal{L}_2$, il existe un $\varepsilon(\delta)$ telle que $\left\|J''_{\lambda_1}(w) - J''_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})\right\|_{\mathcal{L}_2} < \frac{\delta}{2} \|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ si $\left\|w - \underline{v}_{\lambda_1}\right\|_{H_0^1(\Omega)} < \varepsilon(\delta)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} J''_{\lambda_1}(w)(\varphi,\varphi) &= J''_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})(\varphi,\varphi) + J''_{\lambda_1}(w)(\varphi,\varphi) - J''_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})(\varphi,\varphi) \\ &\geq \delta \|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \frac{\delta}{2} \|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \frac{\delta}{2} \|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Or, par la formule de Taylor-Lagrange sur les espaces de Banach :

$$J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1} + \varphi) - J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1}) = J'_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})(\varphi) + \frac{1}{2} J''_{\lambda_1}(w)(\varphi,\varphi)$$

où $w = \underline{v}_{\lambda_1} + \theta\varphi$ avec $\theta \in]0,1[$. Si $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} < \varepsilon(\delta)$ alors $\left\|w - \underline{v}_{\lambda_1}\right\|_{H_0^1(\Omega)} < \varepsilon(\delta)$ et donc

$$J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1} + \varphi) - J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1}) \geq J'_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})(\varphi) + \frac{\delta}{2} \|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \frac{\delta}{2} \|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

car nous avons $J'_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1}) = 0$, alors $\underline{v}_{\lambda_1}$ est un minimum local strict dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. D'autre part $J_{\lambda_1}(t\underline{v}_{\lambda_1}) \to -\infty$ si $t \to +\infty$. Alors il existe $R_{\lambda_1} > 0$ et $w_{\lambda_1} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\|w_{\lambda_1}\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} > R_{\lambda_1}$ telle que

$$\inf \left\{ J_\lambda(v) : \left\|v - \underline{v}_{\lambda_1}\right\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = R_{\lambda_1} \right\} > J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1}) > J_{\lambda_1}(w_{\lambda_1}).$$

Donc J_{λ_1} a la géométrie du col au voisinage de $\underline{v}_{\lambda_1}$. Comme dans le cas λ petit, nous utilisons le résultat de[16] et nous prouvons l'existence d'une solution de (P_{v,λ_1}) au niveau $c_{\lambda_1} > J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})$, et donc cette solution est différente de $\underline{v}_{\lambda_1}$.

• Si $g'(0) > 0$, alors g n'est pas de classe C^1. Considérons une fonction $\bar{g}$ de classe C^1 qui vaut g sur $[0, \infty)$ et $-1/2$ sur $]-\infty, 1[$ et telle que $\bar{g} \geq -1/2$ sur $[1, 0]$. Définissons $G(t) = \displaystyle\int_0^t \bar{g}(s)ds$. On a $G''(t) = \bar{g}'(t)$, et elle satisfait (5.2.7) avec une autre constante C. Donc la fonctionnelle I_{λ_1} définie pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ par :

$$I_{\lambda_1}(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \lambda_1 \int_\Omega f(x)(v + G(v))dx,$$

est de classe C^2 sur $H_0^1(\Omega)$ et $I''_{\lambda_1}(v)(w, \psi)$ est donné par l'expression (5.2.6). Nous remarquons facilement que $I_{\lambda_1}(v) = J_{\lambda_1}(v)$, $I'_{\lambda_1}(v) = J'_{\lambda_1}(v)$ et $I''_{\lambda_1}(v) = J''_{\lambda_1}(v)$ pour toute fonction strictement positive $v \in H_0^1(\Omega)$, puisque $\bar{g} = g$ sur $[0, \infty)$. Donc

$$I''_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})(\varphi, \varphi) = J''_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})(\varphi, \varphi) \geq \delta \left\|\varphi\right\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

et comme pour J_{λ_1}, on montre que

$$I_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1} + \varphi) - I_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1}) \geq I'_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})(\varphi) + \frac{\delta}{2} \left\|\varphi\right\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

pour $\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)}$ suffisamment petit. Or $I'_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1}) = J'_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1}) = 0$; donc en utilisant le fait que $I_{\lambda_1}(t\underline{v}_{\lambda_1}) = J_{\lambda_1}(t\underline{v}_{\lambda_1}) \to -\infty$ si $t \to +\infty$, nous déduisons que I_{λ_1} a la géométrie de col au voisinage de $\underline{v}_{\lambda_1}$. D'une manière similaire au cas λ petit mais avec la fonctionnelle I_{λ_1} on montre l'existence d'une solution $\bar{v}$ du problème

$$\begin{cases} -\Delta \bar{v} = \lambda_1 f(x)(1 + \bar{g}(\bar{v})) & \text{dans} \quad \Omega, \\ \bar{v} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

telle que $I_{\lambda_1}(\bar{v}) > I_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1}) = J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})$. Mais $\bar{g} \geq -1/2$, donc $\lambda_1 f(x)(1 + \bar{g}(\bar{v})) > 0$, et donc $\bar{v} > 0$. Par conséquent $\bar{v}$ est une solution positive de (P_{v,λ_1}) telle que $J_{\lambda_1}(\bar{v}) = I_{\lambda_1}(\bar{v}) > J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})$. Donc $\bar{v} \not\equiv \underline{v}_{\lambda_1}$.

$(ii)_2$:**Cas p quelconque et g non nécessairement convexe.** Supposons que g satisfait la condition (5.1.5), sans hypothèse de convexité, et $f \in L^\infty(\Omega)$. Si $v_0 \neq \underline{v}_{\lambda_1}$ alors nous avons construit une deuxième solution. Dans la suite supposons que $v_0 = \underline{v}_{\lambda_1}$.

Puisque $f \in L^\infty(\Omega)$, alors $\underline{v}_{\lambda_2}$ et $v_0 \in C^{1,\alpha}\left(\bar{\Omega}\right)$, d'après [23]. D'après [13, théorème 5.2], v_0 est un minimum local dans $W_0^{1,p}(\Omega)$: elle minimise la fonctionnelle J_{λ_1} dans une boule $B(v_0, \delta)$ de $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Grâce à (5.1.5), les suites de Palais-Smale sont bornées. En effet, par (5.1.5), il existe $A > 0$ tel que pour tout $t > A$:

$$t\varphi(t) \geq (k+p)\Phi(t)/2.$$

Soit $v_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ une suite de Palais-Smale, c'est à dire v_n satisfait $\lim J_{\lambda_1}(v_n) = c$ et $\xi_n = J'_{\lambda_1.}(v_n)$ tend vers 0 dans $W^{-1,p'}(\Omega)$. En écrivant $v_n = v_n^+ - v_n^-$ et remarquant que $\varphi(s) = 1$ pour $s \leq 0$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\xi_n(v_n) &= \int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx - \lambda_1 \int_\Omega f v_n \varphi(v_n) dx \\
&= \int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx - \lambda_1 \int_\Omega f v_n^+ \varphi(v_n^+) dx + \lambda_1 \int_\Omega f v_n^- dx
\end{aligned}$$

donc, en utilisant l'injection de Sobolev et le fait que $J_{\lambda_1}(v_n)$ est bornée nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx - \xi_n(v_n) &= \lambda_1 \int_\Omega f v_n^+ \varphi(v_n^+) dx - \lambda_1 \int_\Omega f v_n^- dx \\
&\geq \lambda_1 \int_{\{v_n \geq A\}} f v_n^+ \varphi(v_n^+) dx - \lambda_1 \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega v_n^- dx \\
&\geq \lambda_1 \frac{k+p}{2} \int_{\{v_n \geq A\}} f \Phi(v_n) dx - C \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&= \frac{k+p}{2} (\frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx - \lambda_1 \int_{\{v_n < A\}} f \Phi(v_n) dx - J_{\lambda_1}(v_n)) \\
&\quad - C \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\geq \frac{k+p}{2p} \int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx - C(A) - (|c|+1) - C \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}$$

donc, avec une nouvelle constante $C > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{k-p}{2p} \|v_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\leq |\xi_n(v_n)| + C(A) + (|c|+1) C \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq \|\xi_n\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + C(A) + (|c|+1) C \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq C(1 + \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})
\end{aligned}$$

donc (v_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, car $k > p$. Maintenant nous montrons l'existence d'une deuxième solution : il existe une fonction $\tilde{v} = t\underline{v}_0$ telle que $J_{\lambda_1}(\tilde{v}) < J_{\lambda_1}(v_1)$ et $\left\|\underline{v}_{\lambda_1} - \tilde{v}\right\| \geq 1 + \delta$, car $J_{\lambda_1}(tv_0) \to -\infty$ si $t \to \infty$. Soit

$$\tilde{c}_{\lambda_1} = \inf_{\theta \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_{\lambda_1}(\theta(t)) \geq \max(J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1}), J_{\lambda_1}(\tilde{v}))$$

où $\Gamma = \left\{\theta \in C([0,1], W_0^{1,p}(\Omega)) : \theta(0) = \underline{v}_{\lambda_1}, \theta(1) = \tilde{v}\right\}$.

Pour conclure nous distinguons deux cas :

• Si $\tilde{c}_\lambda > \max(J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1}), J_{\lambda_1}(\tilde{v}))$ alors nous obtenons l'existence d'une solution au niveau $\tilde{c}_\lambda$ en appliquant directement le théorème du col classique. Cette solution est différente de $\underline{v}_{\lambda_1}$ car $\tilde{c}_{\lambda_1} > J_{\lambda_1}(\underline{v}_{\lambda_1})$.

• Si $\tilde{c}_\lambda = J_{\lambda_1}(v_1)$ alors il existe une solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)\backslash B(\underline{v}_{\lambda_1}, \delta/2)$, par la variante de [14]. ■

5.4 Solution Extrémale

Dans cette section nous traitons l'existence et la régularité de solution extrémale pour le problème $(P_{v,\lambda})$ lorsque g est sur-linéaire satisfaisant (5.1.1) et (5.1.2).

Définition 5.4.1 *Supposons que* $0 < \lambda_b \leq \lambda^* \leq \lambda_r < \infty$. *La fonction*

$$v^* = \sup_{\lambda \nearrow \lambda_b} \underline{v}_\lambda,$$

où $\underline{v}_\lambda$ *est la solution minimale bornée de* $(P_{v,\lambda})$ *est dite extrémale.*

Remarque 5.4.2 *Supposons que* g *est au moins linéaire à l'infini :*

$$\liminf_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{g(\tau)}{\tau} > 0,$$

qui est satisfaite par exemple quand g *est convexe,* $g \not\equiv 0$.
Alors $\lambda_r < \infty$. *En effet il existe* $c > 0$ *tel que* $1 + g(\tau) \geq c(1+\tau)$ *pour tout* $\tau \in [0, \infty)$.
Si $(P_{v,\lambda})$ *admet une solution renormalisée, alors elle est une sur-solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda c^{(p-1)} f(x)(1+v)^{p-1} & \text{dans} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Alors il existe une solution de ce problème et par suite $\lambda \leq c^{1-p}\lambda_1(f)$ *d'après le théorème 3.4.1.*

Pour g convexe et sur-linéaire vérifiant 5.1.2, le cas $p = 2$ a été étudié dans [4] , avec $f = 1$. Par [4, lemme 5], les auteurs montrent que la fonction extrémale est une solution très faible. Dans le lemme suivant nous étendons leur résultat à des fonctions f plus générales en reprenant leur démonstration qui n'utilise pas l'hypothèse de convexité qu'ils ont imposé sur g, mais qui utilise seulement la sur-linéarité (5.1.2). Ils ont utilisé la convexité de g pour montrer que $\lambda^* < \infty$. Par notre remarque 5.4.2 la convexité n'est pas nécessaire.

Lemme 5.4.3 ([4]) *Supposons $p = 2$, $f \in L^r(\Omega), r > N/2$ et g satisfait (5.1.1) et (5.1.2) . Alors v^* est une solution très faible de (P_{v,λ_b}), c'est à dire $v^* \in L^1(\Omega)$, $fg(v^*) \in L^1(\Omega, \rho dx)$ où ρ est la distance au bord $\partial\Omega$, et*

$$-\int_\Omega v^* \Delta\zeta dx = \lambda_b \int_\Omega f(1+g(v^*))\,\zeta\, dx, \qquad \forall \zeta \in C^2\left(\overline{\Omega}\right), \zeta = 0 \ sur\ \partial\Omega. \qquad (5.4.1)$$

Preuve. Soit $\lambda_n \nearrow \lambda_b$ et $v_n = \underline{v}_{\lambda_n}$. L'hypothèse (5.1.2) implique qu'il existe $C > 0$ tel que $1 + g(t) \geq \frac{2\lambda_1(f)}{\lambda_b} t - C$ pour tout $t \geq 0$. Multiplions l'équation satisfaite part v_n par la première fonction propre $\phi_1 > 0$ du laplacien avec le poids f, nous trouvons

$$\lambda_n \int_\Omega f(1+g(v_n))\phi_1 dx = \lambda_1(f) \int_\Omega f v_n \phi_1 dx \leq \frac{\lambda_b}{2} \int_\Omega f(1+g(v_n)+C)\phi_1 dx,$$

donc nous déduisons que $\displaystyle\int_\Omega f(1+g(v_n))\phi_1 dx$ est bornée, donc $(fg(v_n))$ est bornée dans $L^1(\Omega, \rho dx)$. Utilisons la fonction test $\varphi = \mathcal{G}(1)$, nous trouvons

$$\int_\Omega v_n dx = \lambda_n \int_\Omega f(1+g(v_n))\varphi\, dx \leq \lambda_n C \int_\Omega f(1+g(v_n))\phi_1 dx,$$

par le lemme de Höpf ; donc (v_n) est bornée dans $L^1(\Omega)$. Alors $v^* \in L^1(\Omega)$ et satisfait (5.4.1). ■

Remarque 5.4.4 *Dans [18], l'auteur a montré que v^* est plus régulière lorsque, de plus, g est convexe. En particulier, il a montré que $g(v^*) \in L^1(\Omega)$, en utilisant les propriétés de stabilité de v^*. Donc v^* est une solution renormalisée de (P_{v,λ^*}) Dans le cas $p \neq 2$ il n'y a pas une notion de solution très faible.*

Remarque 5.4.5 *Lorsque $\mathcal{G}(f) \in L^\infty(\Omega)$, la fonction v^* est bien définie à valeurs dans $[0, \infty]$. Dans la suite, nous allons énoncer les résultats d'existence de la solution extrémale sous l'hypothèse $f \in L^r(\Omega), r > N/p$, mais quelques résultats sont valables pour les fonctions moins régulières qui satisfaisent (5.1.4) avec $\mathcal{G}(f) \in L^\infty(\Omega)$. Pour les résultats de régularité de la solution extrémale les hypothèses de régularité sur f sont indispensables pour nos démonstrations.*

5.4.1 Existence locale

Sans hypothèse de convexité sur g nous obtenons un résultat d'existence locale :

Proposition 5.4.6 *Supposons que $f \in L^r(\Omega), r > N/p$ et g satisfait (5.1.1), (5.1.2). Alors v^* est une solution* ***renormalisée locale*** *de (P_{v,λ_b}). En particulier*
(i) $T_k(v^*) \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ pour tout $k > 0$,
(ii) $v^{*p-1} \in L^\sigma_{loc}(\Omega)$, pour tout $\sigma \in [1, N/(N-p))$,
(iii) $(|\nabla v^*|)^{p-1} \in L^\tau_{loc}(\Omega)$, pour tout $\tau \in [1, N/(N-1))$,
(iv) v^* satisfait

$$-\Delta_p v^* = \lambda^* f(1+g(v^*))^{p-1} \qquad dans \qquad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Pour la démonstration nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 5.4.7 *Supposons que $f \in L^1(\Omega)$, et g satisfait (5.1.1). Soit (λ_n) une suite de réels positives telle que* $\liminf \lambda_n > 0$, *et (v_n) une suite de solutions renormalisées du problème (P_{v,λ_n}). Alors*
(i) $(fg(v_n)^{p-1})$ est bornée dans $L^1_{loc}(\Omega)$,
(ii) (v_n^{p-1}) est bornée dans $L^\sigma_{loc}(\Omega)$, pour tout $\sigma \in [1, N/(N-p))$.

Preuve du lemme 5.4.7. Si $f \equiv 0$ sur Ω il n'y a rien à démontrer. Supposons que $f \not\equiv 0$ sur Ω. Par le lemme 2.3.6, pour tout x_0 tel que $B(x_0, 4\rho) \subset \Omega$, il existe une constante $C = C(N,p)$ tel que

$$\begin{aligned}
\lambda_n \int_{B(x_0,\rho)} f(1+g(v_n))^{p-1} dx &\leq C\rho^{N-p} \min_{B(x_0,\rho)} v_n^{p-1} \\
&\leq \frac{C\rho^{N-p}}{\int_{B(x_0,\rho)} f dx} \int_{B(x_0,\rho)} f {v_n}^{p-1} dx,
\end{aligned}$$

en supposons que $f \not\equiv 0$ sur $B(x_0, \rho)$.
Alors il existe $c = c(N, p, \rho, f, x_0, \liminf \lambda_n) > 0$ tel que

$$\int_{B(x_0,\rho)} fg(v_n)^{p-1} dx \leq c \int_{B(x_0,\rho)} f{v_n}^{p-1} dx.$$

Par (5.1.1), il existe $A > 0$ tel que $g(t) \geq (2c)^{1/(p-1)} t$ pour tout $t \geq A$, donc

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,\rho)} f{v_n}^{p-1} dx &= \int_{B(x_0,\rho)\cap\{v_n \leq A\}} f{v_n}^{p-1} dx + \int_{B(x_0,\rho)\cap\{v_n > A\}} f{v_n}^{p-1} dx \\
&\leq A^{p-1} \int_{B(x_0,\rho)} f dx + \frac{1}{2c} \int_{B(x_0,\rho)} fg(v_n)^{p-1} dx \\
&\leq A^{p-1} \|f\|_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{2} \int_{B(x_0,\rho)} f{v_n}^{p-1} dx.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\int_{B(x_0,\rho)} f{v_n}^{p-1} dx \leq 2A^{p-1} \|f\|_{L^1(\Omega)},$$

par consequent

$$\int_{B(x_0,\rho)} fg(v_n)^{p-1} dx \leq c \int_{B(x_0,\rho)} f{v_n}^{p-1} dx \leq 2A^{p-1} c \|f\|_{L^1(\Omega)},$$

et il en résulte (i). De plus nous déduisons que

$$\min_{B(x_0,\rho)} v_n^{p-1} \leq c' = c'(N, p, \rho, f, g, x_0);$$

donc par l'inégalité de Harnack faible , nous obtenons (ii). ■

Preuve de la proposition 5.4.6. Soit $\lambda_n \nearrow \lambda_b$, et $v_n = \underline{v}_{\lambda_n}$. D'après le lemme 5.4.7, $(fg(v_n)^{p-1})$ est bornée dans $L^1_{loc}(\Omega)$, et (v_n^{p-1}) est bornée dans $L^\sigma_{loc}(\Omega)$, pour tout $\sigma \in [1, N/(N-p))$. Alors d'après [2, Theorem 3.2], il existe une sous suite convegente presque partout dans Ω. Et puisque (v_n) est croissante donc toute la suite converge vers v^*. Puisque g est croissante, donc $fg(v^*)^{p-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$ par le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi, et $(fg(v_n)^{p-1})$ converge vers $fg(v^*)^{p-1}$ faiblement dans $L^1_{loc}(\Omega)$; donc $(\lambda_n f(x)(1+g(v_n))^{p-1})$ converge vers $\lambda_b f(x)(1+g(v^*))^{p-1}$ faiblement dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Par [2, Theorem 3.3], v^* est une solution renormalisée locale de (P_{v,λ_b}). ■

5.4.2 Existence globale

5.4.2.1 Sans convexité

Ici, nous donnons un résultat d'existence globale sans hypothèse de convexité sur g mais en imposant sur g la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz (5.1.5) :

Proposition 5.4.8 *Supposons que $f \in L^r(\Omega), r > N/p$ et g satisfait (5.1.1), (5.1.2) et la condition (5.1.5). Alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et elle est une solution variationnelle de (P_{v,λ_b}) .*

Preuve. Soit $\lambda_n \nearrow \lambda_b$, et $v_n = \underline{v}_{\lambda_n}$. D'après la proposition 5.2.1,

$$J_{\lambda_n}(v_n) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v_n|^p\,dx - \lambda_n \int_\Omega f\Phi(v_n)dx \le 0.$$

Puisque v_n satisfait (5.2.15), alors nous obtenons

$$\lambda_n \int_\Omega f(v_n\varphi(v_n) - p\Phi(v_n))dx = pJ_{\lambda_n}(v_n) \le 0.$$

Par l'hypothèse (5.1.5), pour $\varepsilon = (k-p)/2$ il existe $B > 0$ tel que $t\varphi(t) \ge (k-\varepsilon)\Phi(t) = (\frac{k+p}{2})\Phi(t)$ pour tout $t > B$. Par suite

$$\begin{aligned}\int_\Omega fv_n\varphi(v_n)dx &\le \lambda_n p \int_\Omega f\Phi(v_n))dx \\ &= p(\int_{\{v_n\le B\}} f\Phi(v_n)dx + \int_{\{v_n>B\}} f\Phi(v_n)dx) \\ &\le C + \frac{2p}{k+p}\int_{\{v_n>B\}} fv_n\varphi(v_n))dx,\end{aligned}$$

pour une certaine constante $C > 0$. D'où on conclut que $fv_n\varphi(v_n)$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, et donc $\displaystyle\int_\Omega |\nabla v_n|^p\,dx$ est bornée ; alors il existe une sous-suite convergeant faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et nécéssairement vers v^*. Par la proposition 5.4.6, v^* est une solution de (P_{v,λ_b}) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, donc v^* est une solution variationnelle. ■

Remarque 5.4.9 *Un cas particulier pour lequel la condition (5.1.5) est satisfaite est lorsque*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{t\,g'(t)}{g(t)} = m > 1.$$

Cela résulte de la règle de l'Hôpital, puisque $(t\varphi(t))'/\Phi'(t) = 1 + (p-1)tg'(t)/(1+g(t)))$ *pour tout* $t > 0$. *Par suite la proposition 5.4.8 améliore le résultat de [7],où en plus il est supposé que* $g(t) \leq C(1+t^m)$, *et étend encore celle de [5].*

5.4.2.2 Avec convexité

Ici nous supposons que g satisfaisant (5.1.1) et (5.1.2) et convexe au voisinage de ∞. Notons que dans ce cas $\lambda_b = \lambda^* = \lambda_r < \infty$ d'après le théorème 4.3.3 et la remarque 5.4.2.

Comme conséquence de la proposition 5.2.10, nous montrons que la fonction extrémale est une solution de (P_{v,λ^*}) :

Théorème 5.4.10 *Supposons (5.1.1) et (5.1.2) avec* g *est convexe au voisinage de* ∞, *et* $f \in L^r(\Omega)$ *avec* $r > N/p$. *Alors la fonction extrémale* v^* *est une solution* ***renormalisée*** *de* (P_{v,λ^*}).

Preuve. Soit $\lambda_n \nearrow \lambda^*$, et $v_n = \underline{v}_{\lambda_n}$. Alors $J_{\lambda_n}(v_n) \leq 0$ d'après proposition 5.2.1. Par la proposition 5.2.10, $(fg(v_n)^{p-1})$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, et (v_n^{p-1}) est bornée dans $L^\sigma(\Omega)$, pour tout $\sigma \in [1, N/(N-p))$. Alors v_n converge vers v^* presque partout dans Ω, voir la remarque 2.2.13.

Par le théorème de convergence monotone de Beppo-Levi ,$fg(v^*)^{p-1} \in L^1(\Omega)$, et $(fg(v_n)^{p-1})$ converge vers $fg(v)^{p-1}$ fortement dans $L^1(\Omega)$; donc

$$\lambda_n f(x)(1+g(v_n))^{p-1} \to \lambda^* f(x)(1+g(v))^{p-1} \qquad \text{fortement dans } L^1(\Omega).$$

D'après le remarque 2.2.19, v est une solution renormalisée de (P_{v,λ^*}). ∎

5.4.3 Régularité

Dans cette section nous supposons que g est convexe au voisinage de ∞ et nous cherchons d'autres informations sur la régularité de v^* en utilisant la semi-stabilité de la solution minimale bornée de $(P_{v,\lambda})$, donnée par [6, proposition 2.2]. Nous étendons les résultats de [18] pour $p = 2$ et de [22] pour $p > 2$ avec $f \equiv 1$. Ici nous utilisons la fonction h définie par (5.2.9), introduite par [18].

Proposition 5.4.11 *Supposons (5.1.1) et (5.1.2) avec* g *convexe sur* $[a, \infty)$ *pour un* $a > 0$ *et* $f \in L^r(\Omega)$, $r > N/p$. *Soit* h *définie par (5.2.9).*
(i) Alors

$$f(1+g(v^*))^{p-1}h(v^*) \in L^1(\Omega). \tag{5.4.2}$$

(ii) Si $N < N_0 = pp'/(1 + 1/(p-1)r)$, *alors* $v^* \in L^\infty(\Omega)$. *En particulier si* $N = p$ *alors* $v^* \in L^\infty(\Omega)$.

Si $N > N_0$, *alors* $v^{*p-1} \in L^k(\Omega)$ *pour tout* $k < \bar{\sigma}$, *où* $1/\bar{\sigma} = 1 - pp'/N + 1/r(p-1)$.

Si $N = N_0$, *alors* $v^* \in L^k(\Omega)$ *pour tout* $k \geq 1$.

(iii) Si $N < N_1 = p(1 + p')/(1 + p'/r)$ *alors* $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Si $N > N_1$, $|\nabla v^*|^{p-1} \in L^\tau(\Omega)$ *pour tout* $\tau < \bar{\tau}$ *où* $1/\bar{\tau} = 1 + 1/(p-1)r - (p'+1)/N$.

Si $N = N_1$, $|\nabla v^*| \in L^s(\Omega)$ *pour tout* $s < p$.

(iv) Si $\liminf_{t\to\infty} h(t)/t > 0$, *alors* $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *En particulier cette condition est satisfaite si* $\liminf_{t\to\infty}(g'(t) - g(t)/t) > 0$.

Preuve. (i) Soit $\lambda_n \nearrow \lambda^*$, et $v_n = \underline{v}_{\lambda_n}$. D'après [7, Proposition 2.2], v_n est semi-stable. Considérons $\psi = g(v_n)$ dans (5.2.3) avec $\lambda = \lambda_n$ et $v = v_n$, nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^p \, g'^2(v_n)dx \geq \lambda_n \int_\Omega f(1 + g(v_n))^{p-2} g'(v_n) g^2(v_n)dx.$$

On considère la fonction $S(t) = \displaystyle\int_0^t g'^2(s)ds$, pour tout $t \geq 0$. Prenons $S(v_n)$, comme fonction test dans (P_{v,λ_n}), nous trouvons

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^p \, g'^2(v_n)dx = \lambda_n \int_\Omega f(1 + g(v_n))^{p-1} S(v_n)dx$$

Par suite

$$\int_\Omega f(1 + g(v_n))^{p-2}((1 + g(v_n))S(v_n) - g'(v_n)g^2(v_n))dx \geq 0.$$

Mais $(1 + g(t))S(t) - g'(t)g^2(t) = S(t) - g(t)(g'(t)g(t) - S(t)) = S(t) - g(t)h(t)$. Donc

$$\int_\Omega f(1 + g(v_n))^{p-2}(S(v_n) - g(v_n)h(v_n))dx \geq 0,$$

c'est à dire

$$\int_\Omega f(1 + g(v_n))^{p-2} g(v_n)h(v_n)dx \leq \int_\Omega f(1 + g(v_n))^{p-2} S(v_n)dx$$

Or, par (5.2.11) et (5.2.13) du lemme 5.2.9 nous avons $\lim_{t\to\infty} h(t)/g'(t) = \infty$, et par (5.1.2) on a $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$, donc

$$\frac{S(t)}{g(t)h(t)} = \frac{g'(t)g(t) + h(t)}{g(t)h(t)} = \frac{g'(t)}{h(t)} - \frac{1}{g(t)} \to 0 \qquad \text{si } t \to \infty,$$

donc il existe $A>0$ assez grand tel que $S(t)\leq (g(t)h(t))/2$ pour tout $t\geq A$. Alors il existe $C=C(A)>0$ tel que

$$\int_\Omega f(1+g(v_n))^{p-2}g(v_n)h(v_n))dx \leq C.$$

Puisque $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=\infty$, donc il existe $B>0$ tel que $1+g(t)\leq 2g(t)$ pour $t\geq B$, par conséquent

$$(f(1+g(v_n))^{p-1}h(v_n)) \qquad \text{est bornée dans } L^1(\Omega), \tag{5.4.3}$$

d'où nous déduisons (5.4.2). Alors, en utilisant (5.2.13) du lemme 5.2.9 nous obtenons

$$fg(v^*)^{p-1}j(v^*)\in L^1(\Omega),$$

d'où, par (5.2.11) nous déduisons

$$fg(v^*)^{p-1}g'(v^*)\in L^1(\Omega).$$

Par convexité de g sur $[a,\infty)$, pour tout $t\geq a$ nous avons $g(a)\geq g(t)+(a-t)g'(t)\geq g(t)-tg'(t)$, car g croissante. Donc $\frac{g(t)}{t}\leq g'(t)+\frac{g(a)}{t}\leq g'(t)+\frac{g(a)}{a}$ pour tout $t\geq a$. Par conséquent

$$fg(v^*)^p/v^*\in L^1(\Omega).$$

En particulier nous retrouvons de nouveau que $(f(1+g(v^*))^{p-1)}\in L^1(\Omega)$, qui a été obtenu dans le théorème 5.4.10.

$(ii)-(iii)$ La régularité de v^* découle de l'estimation $f(g(v^*))^p/v^*\in L^1(\Omega)$. Nous utilisons un argument de bootstrap en plusieurs étapes :

Etape d'initiation. Prenons σ tel que $r'<\sigma<N/(N-p)$, nous avons $v^{*p-1}\in L^\sigma(\Omega)$. Définissons θ par $\frac{p}{\theta}=p-1+\frac{1}{r}+\frac{1}{\sigma}$, nous avons $\theta\in(1,p')$, et

$$1-\frac{\theta}{p'}=1-\frac{p-1}{p/\theta}=\frac{(p/\theta)-(p-1)}{p/\theta}=\frac{\theta}{p}(\frac{1}{r}+\frac{1}{\sigma})=\frac{\theta}{p}(\frac{r+\sigma}{r\sigma}),$$

donc $p'/(p'-\theta)=\frac{p}{\theta}(\frac{r\sigma}{r+\sigma})$. Par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (fg(v^*)^{p-1})^\theta dx &= \int_\Omega (\frac{f^{1/p}g(v^*)}{v^{*1/p}})^{(p-1)\theta}(f^{\theta/p}v^{*\theta/p'})dx\\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{fg(v^*)^p}{v^*}dx\right)^{\theta/p'}\left(\int_\Omega (f^{\theta/p}v^{*\theta/p'})^{p'/(p'-\theta)}dx\right)^{1-\theta/p'}\\
&= \left(\int_\Omega \frac{fg(v^*)^p}{v^*}dx\right)^{\theta/p'}\left(\int_\Omega f^{r\sigma/(r+\sigma)}v^{*(p-1)r\sigma/(r+\sigma)}dx\right)^{1-\theta/p'}\\
&\leq \left(\int_\Omega \frac{fg(v^*)^p}{v^*}dx\right)^{\theta/p'}\left(\int_\Omega f^r dx\right)^{\theta/p}\left(\int_\Omega v^{*\sigma(p-1)}dx\right)^{\theta/p\sigma}
\end{aligned}$$

Alors $fg(v^*)^{p-1} \in L^{\theta}(\Omega)$ avec $\theta > 1$.

Si $p = N$, alors par le lemme 2.3.3, $v^* \in L^{\infty}(\Omega)$. Dans la suite nous supposons $p < N$. Choisissons σ suffisamment proche de r' :

$$\frac{1}{\sigma} > \frac{1}{r'} - \frac{p(N-p)}{N},$$

nous obtenons

$$\frac{1}{\theta} = 1 + \frac{1}{p}(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{r'}) > \frac{p}{N}.$$

Par le lemme 2.3.3, puisque $\theta < N/p$, nous avons

$$v^{*p-1} \in L^{\sigma_1}(\Omega) \qquad \text{avec } \sigma_1 = N\theta/(N - p\,\theta).$$

Pour σ suffisamment proche de r' :

$$\frac{p-1}{\sigma} > \frac{1}{r'} - \frac{p(N-p)}{N},$$

nous trouvons que $\sigma_1 > \sigma$.

Définissons θ_1 par

$$\frac{1}{\theta_1} = 1 + \frac{1}{p}(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{r'}).$$

Alors $\theta_1 > \theta$ et nous montrons que $fg(v^*)^{p-1} \in L^{\theta_1}(\Omega)$, comme pour θ. Dans la suite nous discutons la position de θ_1 par rapport à N/p et nous pouruivons par un argument de *bootstrap.*

Bootstrap 1. Nous distinguons les trois cas suivants :

Cas 1 : Si $\theta_1 < N/p$ alors $v^{*p-1} \in L^{\sigma_2}(\Omega)$ avec $\frac{1}{\sigma_2} = \frac{1}{\theta_1} - \frac{p}{N}$, d'après le lemme (2.3.3). Nous avons $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma > r'$. Définissons θ_1 par $\frac{1}{\theta_2} = 1 + \frac{1}{p}(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{r'})$. Alors $\theta_2 > \theta_1$ et $fg(v^*)^{p-1} \in L^{\theta_2}(\Omega)$, comme dans l'étape d'initiation.

Cas 2 : Si $\theta_1 = N/p$ alors $v^{*p-1} \in L^{s}(\Omega)$ pour tout $s \geq 1$. Prenons k : $\frac{p}{k} = p - 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$, avec s assez grand ; par exemple $\frac{1}{s} < \frac{1}{r'} - \frac{p(N-p)}{N}$. Alors $k > N/p$ et $fg(v^*)^{p-1} \in L^{k}(\Omega)$, comme dans l'étape d'initiation. Alors $v^{*p-1} \in L^{\infty}(\Omega)$.

Cas 3 : Si $\theta_1 > N/p$ alors $v^{*p-1} \in L^{\infty}(\Omega)$.

Et ainsi de suite, nous pouvons définir deux suites strictement croissantes (σ_ν) et (θ_ν), par

$$\frac{1}{\sigma_\nu} = \frac{1}{\theta_{\nu-1}} - \frac{p}{N} = 1 + \frac{1}{p}(\frac{1}{\sigma_{\nu-1}} - \frac{1}{r'}) - \frac{p}{N}, \tag{5.4.4}$$

$$\frac{1}{\theta_\nu} = 1 + \frac{1}{p}(\frac{1}{\sigma_\nu} - \frac{1}{r'}) = 1 + \frac{1}{p}(\frac{1}{\theta_{\nu-1}} - \frac{p}{N} - \frac{1}{r'}), \tag{5.4.5}$$

tant que $\theta_{\nu-1} < N/p$, telles que $v^{*p-1} \in L^{\sigma_\nu}(\Omega)$ et $fg(v^*)^{p-1} \in L^{\theta_\nu}(\Omega)$. Ainsi nous obtenons une suite $(\theta_{\nu-1})$ strictement croissante majorée par N/p, alors $(\theta_{\nu-1})$ converge vers une limite $l_\theta \leq N/p$. En passant à la limite dans la relation itérative (5.4.5) nous obtenons

$$\frac{1}{l_\theta} = 1 + \frac{1}{p}(\frac{1}{l_\theta} - \frac{p}{N} - \frac{1}{r'}),$$

donc

$$\frac{1}{l_\theta} = 1 + \frac{1}{(p-1)r} - \frac{p'}{N}.$$

Donc

$$\frac{1}{l_\theta} \geq p/N \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{(p-1)r} \geq \frac{p+p'}{N} = \frac{pp'}{N} \Leftrightarrow N \geq N_0.$$

D'où on conclut

• Si $N < N_0$ alors l'argument itératif s'arrête après un nombre fini d'étapes $\bar{\nu}$ avec $\theta_{\bar{\nu}} \geq N/p$. Alors $v^{*p-1} \in L^\infty(\Omega)$.

• Si $N \geq N_0$ alors (θ_ν) converge vers l_θ et (σ_ν) converge vers une limite l_σ obtenue en passant à la limite dans (5.4.4) :

$$\frac{1}{l_\sigma} = \frac{1}{l_\theta} - \frac{p}{N} = 1 + \frac{1}{(p-1)r} - \frac{p+p'}{N}.$$

Puisque $v^{*p-1} \in L^{\sigma_\nu}(\Omega)$ pour tout ν alors $v^{*p-1} \in L^k(\Omega)$ pour tout $k < \bar{\sigma}$, où $\bar{\sigma} = l_\sigma$. Dans le cas $N = N_0$ on a $l_\sigma = \infty$. Donc la preuve de (ii) est achevée.

Bootstrap 2. Dans le cas 1 du bootstarp 1 si $\theta_1 \geq \dfrac{Np}{Np-N+p}$ alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$; si $\theta_1 < \dfrac{Np}{Np-N+p} < N/p$ alors nous obtenons par le lemme 2.3.3 : $(|\nabla v^*|^{p-1}) \in L^{\tau_1}(\Omega)$ avec $1/\tau_1 = 1/\theta_1 - 1/N$, et ainsi de suite on peut définir une suite strictement croissante (τ_ν) par

$$1/\tau_\nu = 1/\theta_\nu - 1/N, \tag{5.4.6}$$

tant que $\theta_\nu < \dfrac{Np}{Np-N+p}$, avec $(|\nabla v^*|^{p-1}) \in L^{\tau_1}(\Omega)$. La suite (θ_ν) converge vers une limite $l_\theta \leq \dfrac{Np}{Np-N+p}$ et $\frac{1}{l_\theta} = 1 + \frac{1}{(p-1)r} - \frac{p'}{N}$. Donc

$$\frac{1}{l_\theta} \geq \frac{Np-N+p}{Np} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{N} \Leftrightarrow \frac{1}{(p-1)r} + \frac{1}{p} \geq \frac{1+p'}{N} \Leftrightarrow N \geq N_1.$$

D'où on conclut

• Si $N < N_1$ alors l'argument itératif s'arrête après un nombre fini d'étapes $\bar{\nu}$ avec $\theta_{\bar{\nu}} \geq \dfrac{Np}{Np-N+p}$. Alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

• Si $N < N_1$ alors la suite (τ_ν) converge vers une limite l_τ obtenue en passant à la limite dans (5.4.6) :

$$\frac{1}{l_\tau} = \frac{1}{l_\theta} - \frac{1}{N} = 1 + \frac{1}{(p-1)r} - \frac{1+p'}{N}.$$

Alors $(|\nabla v^*|^{p-1}) \in L^\tau(\Omega)$ pour tout $\tau < \bar{\tau} = l_\tau = (1 + \frac{1}{(p-1)r} - \frac{(p'+1)}{N})^{-1}$. Pour $N = N_1$ on a $\bar{\tau} = \infty$. Donc la preuve de (iii) est achevée.

(iv) Si $\liminf_{t\to\infty} h(t)/t > 0$, alors $\int_\Omega f(1 + g(v_n))^{p-1} v_n dx$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, en utilisant (5.4.3). En multipliant (P_{v,λ_n}) par v_n nous obtenons

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx = \lambda_n \int_\Omega f(1 + g(v_n))^{p-1} v_n dx \le C,$$

donc $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Cela est vrai en particulier quand $\liminf_{t\to\infty} j(t)/t > 0$, d'après (5.2.13) du lemme 5.2.9. ■

Remarque 5.4.12 *Si $p \ge 2$, alors v^* est semi-stable. En effet $v_n = \underline{v}_{\lambda_n}$ satisfait (5.2.3) pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Et $(|\nabla v_n|^{p-1})$ converge fortement dans $L^1(\Omega)$ vers $|\nabla v^*|^{p-1}$, donc on peut passer à la limite en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et le lemme de Fatou.*

Remarque 5.4.13 *Si $p = 2$, Ω strictement convexe, et $f = 1$, alors $v^* \in W_0^{1,2}(\Omega)$, pour* ***toute*** *fonction g satisfaisant (5.1.1) et (5.1.2), d'après [19] . La preuve utilise le fait que $J_{\lambda^*}(v^*) \le 0$ et l'identité de Pohozaev ; le point clé est que v^* est régulière au voisinage du bord , d'après les résultats de [20].*
Dans le cas général $p > 1$ avec $f \equiv 1$, si on peut montrer que v^* est régulière au voisinage du bord, alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$. En effet, un résultat de [15] étend l'identité de Pohozaev au p-Laplacien. Pour f quelconque on ne peut pas obtenir le résultat par cette méthode , même pour $p = 2$.

Remarque 5.4.14 *Dans le cas exponentiel $1 + g(v) = e^v$, avec $f \equiv 1$, il a été montré que $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$, et $v^* \in L^\infty(\Omega)$ quand $N < N_2 = 4p/(p-1) + p$, voir [11] et [12]. Dans le cas de puissance, $(1 + g(v))^{p-1} = (1 + v)^m$ on a les même conclusions; si $N \ge N_2$, et $m < m_c$, où*

$$m_c = \frac{(p-1)N - 2\sqrt{(p-1)(N-1)} + 2 - p}{N - p - 2 - 2\sqrt{(N-1)/(p-1)}}$$

alors on a encore $v^* \in L^\infty(\Omega)$, voir [10]. Les même conclusions ont été montrées quand la fonction g se comporte comme une exponentielle ou une puissance, voir [24], [7], [21], et [9]. A notre connaissance, pour g général on ne sait pas si v^* est bornée pour N entre $N_0 = pp'$ et N_2, à l'exception du cas radial , voir [8].

Maintenant nous donnons deux cas pour lesquelles la solution extrémale est bornée quand g a une croissance lente :

Proposition 5.4.15 *Supposons que g satisfait (5.1.1), (5.1.2 et (5.1.3) pour un certain* $Q \in (p-1, Q_1)$ *, et g est convexe au voisinage de* ∞*, et* $f \in L^r(\Omega)$ *avec* $Qr' < Q_1$*.*

Alors $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et elle est une solution variationnelle* (P_{v,λ^*})*.*

Preuve. Comme dans la proposition 4.3.10, la conclusion résulte du théorème 5.4.10 et (i) de la proposition 2.3.4. ■

Comme conséquence de la proposition 5.3.1 nous obtenons que la solution extrémale est bornée sous la condition (5.1.3) et $f \in L^r(\Omega)$ avec $(Q+1)r' < p^*$, ce qui achève la démonstration du théorème 5.1.2 :

Proposition 5.4.16 *Supposons (5.1.1), (5.1.2) et (5.1.3), g convexe au voisinage de* ∞*, et* $f \in L^r(\Omega)$ *avec* $(Q+1)r' < p^*$*. Alors la solution extrémale* $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et elle est une solution variationnelle* (P_{v,λ^*})*.*

Preuve. Considérons $\lambda_n \nearrow \lambda^*$, la suite de solutions minimales $v_n = \underline{v}_{\lambda_n}$ satisfait $J_{\lambda_n}(v_n) \leq 0$ par la propositions 5.2.1. D'après la proposition 5.3.1, (v_n) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et converge vers v^* presque partout dans Ω, donc $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et elle est une solution variationnelle de (P_{v,λ^*}). Alors $v \in L^\infty(\Omega)$ d'après (iii) de la proposition 2.3.4 . ■

Remarque 5.4.17 *Dans le cas* $p = N$*, les hypothèses de croissance ne sont pas nécessaires dans les propositions 5.4.15 et 5.4.16 : pour tout g satisfaisant (5.1.1), convexe au voisinage de* ∞*, et* $f \in L^r(\Omega), r > 1$*, nous avons* $v^* \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$*, par la proposition 5.4.11. Cependant, nous avons besoin de l'hypothèse (5.1.3) pour un* $Q > N-1$ *pour obtenir le résultat de multiplicité du théorème 5.1.1.*

Bibliographie

[1] Abdellaoui B., Dall'Aglio A., and Peral I., *Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient,* J. Differential Equations, 222(1) :21–62, 2006.

[2] Bidaut-Véron M.F., *Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data,* Adv. Nonlinear Stud., 3(1) :25–63, 2003.

[3] Bidaut-Véron M.F., and Pohozaev S., *Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems,* J. Anal. Math., 84 :1–49, 2001.

[4] Brezis H., Cazenave T., Martel Y., and Ramiandrisoa A., *Blow up for* $u_t - \Delta u = g(u)$ *revisited,* Adv. Differential Equations, 1(1) :73–90, 1996.

[5] Brezis H. and Vázquez J.L., *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems,* Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, 10(2) :443–469, 1997.

[6] Cabré X., *Extremal solutions and instantaneous complete blow-up for elliptic and parabolic problems,* Perspectives in nonlinear partial differential equations, volume 446 of Contemp. Math., pages 159–174. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[7] Cabré X. and Sanchón M., *Semi-stable and extremal solutions of reaction equations involving the p-Laplacian,* Commun. Pure Appl. Anal., 6(1) :43–67, 2007.

[8] Capella A. Cabre X. and Sanchon M. *Regularity of radial minimizers of rection equations involving the p-Laplacian*, preprint.

[9] Eidelman S. and Eidelman Y., *On regularity of the extremal solution of the Dirichlet problem for some semilinear elliptic equations of the second order,* Houston J. Math., 31(3) :957–960 (electronic), 2005.

[10] Ferrero A., *On the solutions of quasilinear elliptic equations with a polynomial-type reaction term,* Adv. Differential Equations, 9(11-12) :1201–1234, 2004.

[11] García Azorero J. and Peral I., *On an Emden-Fowler type equation,* Nonlinear Anal., 18(11) :1085–1097, 1992.

[12] García Azorero J., Peral I., and Puel J.P., *Quasilinear problems with exponential growth in the reaction term,* Nonlinear Anal., 22(4) :481–498, 1994.

[13] García Azorero J., Peral I., and Manfredi J.J., *Sobolev versus Hölder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations,* Commun. Contemp. Math., 2(3) :385–404, 2000.

[14] Ghoussoub N. and Preiss D., *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 6(5) :321–330, 1989.

[15] Guedda M. and Véron L., *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents,* Nonlinear Anal., 13(8) :879–902, 1989.

[16] Jeanjean L., *On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on* $\mathbf{R}^N$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 129(4) :787–809, 1999.

[17] Jeanjean L. and Toland J.F., *Bounded Palais-Smale mountain-pass sequences,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 327(1) :23–28, 1998.

[18] Nedev G., *Regularity of the extremal solution of semilinear elliptic equations,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 330(11) :997–1002, 2000.

[19] Nedev G., *Extremal solutions of semilinear elliptic equations,* preprint (2001)

[20] Ramiandrisoa A., *Blow-up for two nonlinear problems,* Nonlinear Anal., 41(7-8, Ser. A : Theory Methods) :825–854, 2000.

[21] Manel Sanchón. *Boundedness of the extremal solution of some p-Laplacian problems,* Nonlinear Anal., 67(1) :281–294, 2007.

[22] Sanchón M., *Regularity of the extremal solution of some nonlinear elliptic problems involving the p-Laplacian* Potential Anal., 27(3) :217–224, 2007.

[23] Tolksdorf P., *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations,* J. Differential Equations, 51(1) :126–150, 1984.

[24] Ye D. and Zhou F., *Boundedness of the extremal solution for semilinear elliptic problems,* Commun. Contemp. Math., 4(3) :547–558, 2002.

[25] Otared K., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques,* Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications],(13),viii+325, 1993.

Chapitre 6

Étude du problème $(P_{v,\lambda})$ avec données mesures quelconques

Sommaire

6.1 Introduction

Dans ce chapitre nous donnons des résultats d'existence et de non-existence de solutions renormalisées pour le problèmes $(P_{v,\lambda})$ avec mesure $\mu \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$, $\mu \neq 0$:

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(1+g(v))^{p-1} + \mu & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{6.1.1}$$

En fait, le résultat d'existence du théorème 2.11 est une conséquence du théorème suivant qui traite l'existence du **problème plus général** :

$$\begin{cases} -\Delta_p U = \lambda h(x,U) + \mu & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad U = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1.2}$$

où $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ est arbitraire, sans hypothèse de signe ; et h une fonction de Carathéodory de $\Omega \times \mathbb{R}$ à valeurs réels ayant une croissance lente polynomiale de la forme

$$|h(x,U)| \leq f(x)(K + |U|^Q), \tag{6.1.3}$$

avec $Q > 0$ et $\lambda, K > 0$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $Qr' < Q_1$, où Q_1 est donné par (4.1.5).

Théorème 6.1.1 *Soit $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, et h satisfaisant (6.1.3) avec avec $Q > 0$ et $\lambda, K > 0$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $Qr' < Q_1$. Alors il existe une solution renormalisée de (6.1.2) dans l'un des cas suivants :*

$$Q = p - 1 \quad \textit{et} \quad \lambda < \lambda_1(f); \tag{6.1.4}$$

$$0 < Q < p - 1; \tag{6.1.5}$$

$$\begin{cases} Q > p - 1 \quad \textit{et} \\ \lambda \|f\|_{L^r(\Omega)} (\lambda K \|f\|_{L^r(\Omega)} + |\mu|(\Omega))^{(Q/(p-1))-1} |\Omega|^{1/r' - Q/Q_1} \leq C \end{cases} \tag{6.1.6}$$

pour une certaine constante $C = C(N,p,Q)$ pour $p < N$, et $C = C(N,Q,K_N(\Omega))$ pour $p = N$.

Ce théorème améliore un résultat annoncé dans [6, théorème 1.1] pour $Q > 1$, avec une preuve **incomplète**. Notre résultat traite le cas général $Q > 0$, et donne les meilleurs informations dans le cas $Q = p - 1$.

Par la proposition suivante nous obtenons des résultats de non-existence de solutions renormalisées du problème (6.1.1) :

Proposition 6.1.2 *Soit $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ et $f \in L^1(\Omega)$ une fonction positive.*

(i) Pour tout $\lambda > \lambda_1(f)$, ou $\lambda = \lambda_1(f)$ et $f \in L^{N/p}(\Omega), p < N$, il n'y a pas de solution positive v de

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(1+v)^{p-1} + \mu_s & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.1.7}$$

(ii) Soit g définie sur $[0,\infty)$ et $\liminf\limits_{t\to\infty} g(\tau)/\tau > 0$. Si $\lambda > \lambda_r$, il n'y a pas de solutions v de

$$\begin{cases} -\Delta_p v = \lambda f(1+g(v))^{p-1} + \mu_s & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad v = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans la démonstration de la proposition précédente nous utilisons le résultat suivant de Ponce [7], qui est une conséquence directe du principe de maximum quand $p = 2$, mais n'est pas simple pour $p \neq 2$, puisqu'on ne connait pas un principe de comparaison pour les mesures :

Lemme 6.1.3 *Soit h une fonction Carathéodory de $\Omega \times [0,\infty)$ dans $[0,\infty)$. Soit $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ et u une solution renormalisée positive de*

$$\begin{cases} -\Delta_p U = h(x,U) + \mu_s & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad U = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.1.8}$$

Supposons que $\sup\limits_{t\in[0,u(x)]} h(x,t) = F(x) \in L^1(\Omega)$. Alors il existe une solution renormalisée positive V de

$$\begin{cases} -\Delta_p V = h(x,V) & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad V = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.1.9}$$

6.2 Preuves

La démonstration du [6, théorème 1.1] est incomplète : l'approximation de la mesure n'est pas précisée. Ici nous donnons une preuve détaillée, valable pour tout $p \leq N$, où nous précisons l'approximation de la mesure.

Preuve du théorème 6.1.1. La démonstration est partagée en plusieurs étapes :

Etape 1 : Construction d'une approximation convenable de μ. Nous suivons une preuve de [3], voir encore [5] .Soit

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + \mu_s^+ - \mu_s^-,$$

avec $\mu_1 = \mu_0^+, \mu_2 = \mu_0^- \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$ et $\mu_s^+, \mu_s^- \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$, donc

$$\mu_1(\Omega) + \mu_2(\Omega) + \mu_s^+(\Omega) + \mu_s^-(\Omega) \leq 2\,|\mu(\Omega)|\,.$$

Par le résultat de [4], pour $i = 1, 2$, μ_i se décompose de la façon suivante

$$\mu_i = \varphi_i\gamma_i, \qquad \text{avec } \gamma_i \in \mathcal{M}_b^+(\Omega) \cap W^{-1,p'}(\Omega) \text{ et } \varphi_i \in L^1(\Omega,\gamma_i).$$

Soit $(K_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de compactes de Ω, telle que $\cup_{n=1}^{+\infty} K_n = \Omega$ et soit

$$\nu_{1,i} = T_1(\varphi_i\chi_{K_1})\gamma_i \quad \text{ et } \quad \nu_{n,i} = T_n(\varphi_i\chi_{K_n})\gamma_i - T_{n-1}(\varphi_i\chi_{K_{n-1}})\gamma_i.$$

En utilisant une suite régularisante, il existe une fonction positive $\phi_{n,i} \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\|\phi_{n,i} - \nu_{n,i}\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq 2^{-n}\mu_i(\Omega),$$

pour tout $n \geq 1$, voir [3]. Alors $h_{n,i} = \sum_1^n \phi_{k,i} \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $(h_{n,i})$ converge fortement dans $L^1(\Omega)$ vers une fonction h_i, et $\|h_{n,i}\|_{L^1(\Omega)} \leq \mu_i(\Omega)$. On définit la suite de fonctions

$$G_{n,i} = \sum_1^n (\nu_{k,i} - \phi_{k,i}) \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap \mathcal{M}_b(\Omega).$$

Nous avons encore $(G_{n,i})$ converge fortement dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ vers une certaine fonction G_i, et $\mu_i = h_i + G_i$, et $\|G_{n,i}\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \leq 2\mu_i(\Omega)$. Pour la partie singulière, par régularisation, il existe une suite de fonctions positives λ_n^1 et $\lambda_n^2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ convergeant respectivement vers μ_s^+, μ_s^- pour la topologie étroite, avec $\|\lambda_n^1\|_{L^1(\Omega)} \leq \mu_s^+(\Omega)$, $\|\lambda_n^2\|_{L^1(\Omega)} \leq \mu_s^-(\Omega)$. Alors la suite d'approximations de μ define par

$$\mu_n = h_{n,1} - h_{n,2} + G_{n,1} - G_{n,2} + \lambda_n^1 - \lambda_n^2$$

satisfait les conditions de stabilité du théorème 2.2.12, et de plus elle est bornée par rapport à $|\mu|(\Omega)$ par une **constante universelle** :

$$|\mu_n|(\Omega) \leq 4\,|\mu|(\Omega).$$

Etape 2 : Le problème d'approximation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, nous cherchons une solution variationnelle de

$$-\Delta_p U_n = \lambda T_n(h(x, U_n)) + \mu_n, \tag{6.2.1}$$

en utilisant le théorème de point fixe de Schauder . À chaque $V \in W_0^{1,p}(\Omega)$ nous associons la solution $U = \mathcal{F}_n(V) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de

$$-\Delta_p U = \lambda T_n(h(x, V)) + \mu_n,$$

où T_n est la fonction de troncature. En considérant U comme fonction test nous touvons

$$\|\nabla U\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \lambda n\,\|U\|_{L^1(\Omega)} + \|\mu_n\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\,\|U\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\,,$$

donc $\|U\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_n$ indépendante de V.
Soit $B_n = B(0, C_n)$ la boule de rayon C_n de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors $\mathcal{F}_n$ est définie, continue et compacte de B_n dans B_n, donc elle admet un point fixe U_n.

Etape 3 : Estimations :

Par l'estimation (2.3.2) de la proposition 2.3.2, avec $\sigma = Qr'/(p-1)$, et par l'hypothèse (6.1.3) nous avons

$$\begin{aligned}(\int_\Omega |U_n|^{Qr'}\,dx)^{(p-1)/Qr'} &\leq C_0\,|\Omega|^\ell \left(\lambda \int_\Omega |T_n(h(x,U_n))|\,dx + |\mu_n(\Omega)|\right)\\ &\leq C_0\,|\Omega|^\ell \left(\lambda \,\|f\|_{L^r(\Omega)}\,(\int_\Omega |U_n|^{Qr'}\,dx)^{1/r'} + \lambda K\,\|f\|_{L^1(\Omega)} + 4\,|\mu|\,(\Omega)\right),\end{aligned}$$

où $\ell = (p-1)/Qr' - (N-p)/N$, et $C_0 = C_0(N,p,Q,r)$ pour $p < N$, et $C_0 = C_0(N,Q,r,K_N\,(\Omega))$ pour $p = N$.
Donc

$$(\int_\Omega |U_n|^{Qr'}\,dx)^{(p-1)/Qr'} \leq a + b(\int_\Omega |U_n|^{Qr'}\,dx)^{1/r'} \tag{6.2.2}$$

où

$$a = C_0\,|\Omega|^\ell\,(\lambda K\,\|f\|_{L^1(\Omega)} + 4\,|\mu|\,(\Omega)), \quad b = C_0\,|\Omega|^\ell\,\lambda\,\|f\|_{L^r(\Omega)}\,. \tag{6.2.3}$$

De même, nous avons l'estimation

$$(\int_\Omega |U|^{Qr'}\,dx)^{(p-1)/Qr'} \leq a + b(\int_\Omega |V|^{Qr'}\,dx)^{1/r'} \tag{6.2.4}$$

Etape 4 : Passage à la limite : Maintenant nous distingons les cas suivants :

Cas 1 : $Q < p-1$. Dans ce cas on a $(p-1)/Qr' > 1/r'$, donc l'estimation (6.2.2) implique qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que $\int_\Omega (|U_n|^{Qr'})dx \leq C$, c'est à dire

$$a_n = \int_\Omega |U_n|^{Qr'}\,dx \qquad \text{est bornée .} \tag{6.2.5}$$

Donc, par l'hypothèse (6.1.3), la suite $(h(x,U_n))$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, donc $(-\Delta_p U_n)$ est bornée dans $L^1(\Omega)$.

Alors, voir la remarque 2.2.13, $(|U_n|^{p-1})$ est bornée dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s \in [1, N/(N-p))$ (pour tout $s \geq 1$ si $p = N$) et il existe une sous-suite, notée encore U_n, qui converge presque partout dans Ω vers une certaine fonction mesurable U. Choisissons $s > Qr'/(p-1)$, et soit k_0 définie par :

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{r} + \frac{Q}{(p-1)s}.$$

Alors il est facile de vérifier que $k_0 > 1$ et $(|h(x,U_n)|)$ est bornée dans $L^{k_0}(\Omega)$. Alors, par la convergence presque partout, le lemme de Fatou et le théorème de convergence de Vitali il résulte que

$$h(x,U_n) \to h(x,U) \qquad \text{fortement dans } L^k(\Omega),$$

pour tout $k < k_0$. Par suite, en utilisant le théorème 2.2.12, nous pouvons conclure que U est une solution renormalisée du problème (6.1.2).

Cas 2 : $Q = p-1$. Supposons que $\lambda < \lambda_1(f)$. Dans ce cas nous montrons encore (6.2.5), par contradiction. Supposons que (6.2.5) n'est pas vrai. Alors il existe une sous-suite, qu'on continue à indicer par n, telle que $a_n = \int_\Omega |U_n|^{(p-1)r'}\,dx$ tend vers ∞. Posons $w_n = a_n^{-1/(p-1)r'} U_n$. Alors $w_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\int_\Omega w_n^{(p-1)r'} dx = 1$, et satisfait

$$-\Delta_p w_n = a_n^{-1/r'}(-\Delta_p U_n) = \eta_n + \varphi_n, \tag{6.2.6}$$

où $\eta_n = a_n^{-1/r'} \lambda T_n(h(x, U_n))$ et $\varphi_n = a_n^{-1/r'} \mu_n$. Il est facile de voir que (φ_n) converge vers 0 fortement dans $L^1(\Omega)$, puisque $\mu_n(\Omega)$ est bornée. Et (η_n) est bornée dans $L^1(\Omega)$, puisque $f \in L^r(\Omega)$ et

$$|\eta_n| \leq \psi_n = \lambda f(C a_n^{-1/r'} + |w_n|^{p-1}).$$

Alors, voir la remarque 2.2.13, $(|w_n|^{p-1})$ est bornée dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s \in [1, N/(N-p))$ et il existe une sous-suite, notée encore w_n, qui converge presque partout dans Ω vers une certaine fonction mesurable w.

Alors, par le lemme de Fatou et le théorème de Vitali, $(|w_n|^{(p-1)s})$ converge fortement L^1 (Ω) vers $|w|^{(p-1)s}$, pour tout $s \in [1, N/(N-p))$. En particulier pour $s = r'$, car $r' < N/(N-p)$. D'où $w \not\equiv 0$.

Et (ψ_n) converge fortement dans $L^1(\Omega)$ vers $\lambda f\,|w|^{p-1}$, d'où (η_n) converge fortement dans $\in L^1$ (Ω) vers une certaine fonction $\eta \in L^1$ (Ω) avec $|\eta| \leq \lambda f(x)\,|w|^{p-1}$ presque partout dans Ω. Donc, par le théorème 2.2.12, w est une solution renormalisée du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p w = \eta, & \text{dans} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{6.2.7}$$

Par (i) de la proposition 2.3.4, nous obtenons $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, puisque $r > N/p$. Alors

$$\lambda_1(f) \int_\Omega |w|^p\,dx \leq \int_\Omega |\nabla w|^p\,dx \leq \lambda \int_\Omega f\,|w|^p\,dx,$$

donc $\lambda_1(f) \leq \lambda$, ce qui contredit l'hypothèse. Alors nous pouvons conclure à l'existence d'une solution renormalisée du problème (6.1.2), comme dans le cas précédent.

Cas 3 : $Q > p-1$. Dans ce cas, (6.2.5) n'est pas nécessairement vrai pour cette suite U_n, mais nous construisons une suite particulière (U_n) satisfaisant (6.2.5) : pous tout $V \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $U = \mathcal{F}_n(V)$, nous avons l'estimation (6.2.4). Posons

$$x(V) = (\int_\Omega |V|^{Qr'}\,dx)^{(p-1)/Qr'},$$

nous obtenons $x(U) \leq a + bx(V)^{Q/(p-1)}$. Puisque $Q > p-1$, alors la fonction définie par

$$P(y) = a + b\,y^{Q/(p-1)} - y$$

admet un minimum au point $y_0 = ((p-1)/bQ)^{(p-1)/(Q-p+1)}$ et par un calcul simple on a $P(y_0) = a - c(p,Q)b^{(1-p)/(Q-p+1)}$, pour une certaine constante $c(p,Q) > 0$. Alors $P(y)$ admet au moins une racine si $P(y_0) \leq 0$, ce qui est équivalent à $a^{(Q-p+1)/(p-1)}b \leq C(p,Q)$, et un simple calcul conduit à la condition supposée dans (6.1.6). Soit $y_1 = y(a,b,p,Q)$ la plus petite racine de $P(y)$. Si $x(V) \leq y$ alors $x(U) \leq a + by_1^{Q/(p-1)} = y_1$. L'ensemble

$$A_{n,y_1} = \left\{ V \in W_0^{1,p}(\Omega), x(V) \leq y_1 \text{ et } \|U\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_n \right\}$$

est un sous-ensemble convexe et fermé de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors utilisons le théorème de Schauder dans l'ensemble A_{n,y_1} nous trouvons une solution $U_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (6.2.1) telle que $\displaystyle\int_\Omega |U_n|^{Qr'}\,dx$ est bornée. Et nous concluons comme dans les cas précédent. ■

Remarque 6.2.1 *Dans le cas $Q = p-1$, la condition (6.1.4) est optimale, d'après le théorème 3.1.3. La preuve donnée pour $Q > p-1$ est valable pour $Q = p-1$, mais la condition (6.1.6) obtenue dans ce cas n'est pas optimale.*

Remarque 6.2.2 *L'hypothèse de croissance lente (6.1.3) est naturel pour obtenir un résultat d'existence. Par exemple, soit $p = 2 < N$ et $g(v) = v^Q$ pour un $Q > 0$, et soit $\mu = \delta_a$ la mesure de Dirac en un point $a \in \Omega$. Si v est une solution, alors $v(x) \geq C|x-a|^{2-N}$ au voisinage de a; alors nous avons nécessairement $|x-a|^{(2-N)Q} f \in L^1(\Omega)$; alors $Q < N/(N-2)$ si $f \equiv 1$.*
Plus généralement s'il existe une solution de (6.1.1), alors $f\mathcal{G}(\mu) \in L^1(\Omega)$, où $\mathcal{G}(\mu) = u$ est la solution de (2.2.2). Cette condition est toujours satisfaite si $f \in L^r(\Omega)$ pour un certain $r > N/2$.

Preuve du lemme 6.1.3. Soit $\hat{h}(x,t) = h(x, \max(0, \min(t, u(x))))$. Alors $0 \leq \hat{h}(x,t) \leq F(x)$ presque partout dans Ω. Par le théorème de Schauder, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $V_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ positive telle que

$$-\Delta_p V_n = T_n(\hat{h}(x, V_n)) \qquad \text{in } \Omega.$$

Par la remarque 2.2.19, il existe une sous-suite notée V_n qui converge presque partout vers une solution renormalisée positive V de l'équation

$$\begin{cases} -\Delta_p V = \hat{h}(x,V) & \text{dans} \quad \Omega, \\ V = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Il reste à montrer que $V \leq u$. Pour $m > 0$ fixé, et $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction $\omega = T_m((V_n - u)^+)$. Soit $c_n = \|V_n\|_{L^\infty(\Omega)}$, nous avons

$$V_n - T_{c_n}(u) = \begin{cases} V_n - u \geq 0 & \text{sur} \quad \{u \leq V_n\}, \\ V_n - u \leq 0 & \text{sur} \quad \{V_n < u \leq c_n\}, \\ V_n - c_n \leq 0 & \text{sur} \quad \{u > c_n\}, \end{cases}$$

Par suite

$$(V_n - T_{c_n}(u))^+ = \begin{cases} V_n - u & \text{si} \quad u \le V_n, \\ 0 & \text{si} \quad u > V_n, \end{cases}$$

qui égale à $(V_n - u)^+$. Donc $\omega = T_m((V_n - T_{c_n}(u))^+) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. En remarquant que $\omega^{+\infty} = 0$ sur $\{u > c_n\}$ et $\mu_s^- = 0$, donc par la définition 2.2.4

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla \omega dx = \int_\Omega \omega h(x,u)dx + \int_\Omega \omega^+ d\mu_s^+ = \int_\Omega \omega h(x,u)dx$$

D'aute part, ω est encore admissible dans l'équation satisfaite par V_n; donc

$$\int_\Omega |\nabla V_n|^{p-2} \nabla V_n.\nabla \omega dx = \int_\Omega T_n(\hat{h}(x,V_n))\omega dx;$$

alors

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\nabla V_n|^{p-2} \nabla V_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\right).\nabla \left(T_m((V_n-u)^+)\right) dx \\
&= \int_\Omega (T_n(\hat{h}(x,V_n) - h(x,u))T_m((V_n-u)^+)dx \\
&\le \int_\Omega (\hat{h}(x,V_n) - h(x,u))T_m((V_n-u)^+)dx \\
&= \int_{\{u \le V_n\}} (\hat{h}(x,V_n) - h(x,u))T_m((V_n-u)^+)dx \\
&+ \int_{\{u > V_n\}} (\hat{h}(x,V_n) - h(x,u))T_m((V_n-u)^+)dx \\
&= 0, \ \text{car}
\end{aligned}$$

- Sur $\{u \le V_n\}$ on a $\hat{h}(x,V_n) = h(x,u)$.
- Sur $\{u > V_n\}$ on a $T_m((V_n-u)^+) = 0$.

Par le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, faisons tendre n vers ∞ pour m fixé, puisque les troncatures convergent fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, nous obtenons

$$\int_\Omega \left(|\nabla V|^{p-2} \nabla V - |\nabla U|^{p-2} \nabla U\right).\nabla \left(T_m((V-U)^+)\right) dx \le 0.$$

Alors $T_m((V-U)^+) = 0$ pour tout $m > 0$, donc $V \le U$ presque partout dans Ω. ∎

Preuve de la proposition 6.1.2. Le lemme 6.1.3 dit que s'il existe une solution du problème avec mesure alors il existe une solution du problème sans mesure. D'où nous obtenons (i) d'après le théorème 3.4.1 et (ii) par le fait $\lambda_r < \infty$, d'après la remarque 5.4.2.

Remarque 6.2.3 *Une application de changement de variable de type Cole-Hopf pour un résultat de non-existence* (*dans un cadre parabolique, la singularité porte sur les données initiales*) *peut être trouvée dans la proposition* 3.1 *de [1], voir aussi [2].*

∎

Bibliographie

[1] Ben-Artzi, M. and Souplet, Ph. and Weissler, F. B., *The local theory for viscous Hamilton-Jacobi equations in Lebesgue spaces*, J. Math. Pures Appl. (9) 81 : 343–378, 2002.

[2] Ben-Artzi, M. and Souplet, Ph. and Weissler, F. B., *Sur la non-existence et la non-unicité des solutions du problème de Cauchy pour une équation parabolique semi-linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 329, 371–376, 1999.

[3] Boccardo L., Gallouët T., and Orsina L., *Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 13(5) :539–551, 1996.

[4] Dal Maso G., *On the integral representation of certain local functionals,* Ricerche Mat., 32(1) :85–113, 1983.

[5] Droniou J., Porretta A., and Prignet A., *Parabolic capacity and soft measures for nonlinear equations,* Potential Anal., 19(2) :99–161, 2003.

[6] Grenon N., *Existence results for semilinear elliptic equations with small measure data,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 19(1) :1–11, 2002.

[7] Ponce A., *Communication personnelle.*

Chapitre 7

Applications au problème $(P_{u,\lambda})$ sans et avec données mesures

Sommaire

Dans ce chapitre nous déduisons des résultats d'existence ou de non-existence, de régularité et de multiplicité pour le problème $(P_{u,\lambda})$ à partir des résultats que nous avons obtenus sur le problème $(P_{v,\lambda})$ en utilisant le théorème 2.1.

7.1 Applications et résultats

Le cas $\beta = p-1$ et $g(v) = v$ a été étudié dans la section 3.4 du chapitre 3 par le théorème 3.1.3. Pour une fonction quelconque β satisfaisant (3.1.1), nous associons la fonction $g = T(\beta)$ définie par (3.2.1). Nous avons établi quelques résultats pour le problème $(P_{v,\lambda})$ en supposant que g est définie sur $[0,\infty)$ et satisfait (4.1.4) :

$$M_Q = \limsup_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{g(\tau)^{p-1}}{\tau^Q} < \infty \tag{7.1.1}$$

pour un certain $Q > 0$.

Rappelons que si β est définie sur $[0,\infty)$ alors g est encore définie sur $[0,\infty)$, d'après (3.2.4). Réciproquement, si g est définie sur $[0,\infty)$ alors $L < \infty$ si et seulement si $1/(1+g(v)) \in L^1((0,\infty))$. La condition (7.1.1) est équivalente à

$$\limsup_{t \longrightarrow L} \frac{e^{\gamma(t)}}{\Psi^Q(t)} < \infty. \tag{7.1.2}$$

7.1.1 Problème $(P_{u,\lambda})$ sans donnée mesure

Nous commençons par la présentation de nos résultats d'existence, de régularité et de multiplicité :

Dans le cas où g est linéaire, nous obtenons le résultat suivant

Corollaire 7.1.1 *Supposons que β satisfait (3.1.1) avec $L = \infty$ et que g satisfait (7.1.1) avec $Q = p-1$ et $f \not\equiv 0$.*

Si $M_{p-1}\lambda < \lambda_1(f)$, alors il existe au moins une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème $(P_{u,\lambda})$.

Si de plus $f \in L^{N/p}(\Omega), p < N$, alors $u \in L^k(\Omega)$ pour tout $k > 1$.

Si $f \in L^r(\Omega), r > N/p$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$; et si de plus $\beta \notin L^1((0,\infty))$ alors il existe une infinité de solutions u_s de $(P_{u,\lambda})$ moins régulières que u.

Si $(1+g(v))/v$ est strictement décroissante, alors u est l'unique solution de $(P_{u,\lambda})$ qui satisfait $\Psi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. Nous obtenons d'une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ en appliquant le théorème 3.1.2 au résultat du théorème 4.3.6. La régularité résulte de la remarque 3.3.1 et du fait que $u \le v$.

L'unicité s'obtient comme dans la preuve du corollaire 3.4.2 dans le cas $\beta = p-1$. La forte multiplicité est obtenue par (i) du théorème 2.11 et le théorème 3.1.2. En effet pour chaque mesure $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$ il existe une solution renormalisée du problème (3.1.11) d'après (i) du théorème 2.11. La fonction $u_s = \Psi(v_s)$ est une solution renormalisée de $(P_{u,\lambda})$ d'après le théorème 3.1.2.

■

Remarque 7.1.2 *Si $M_{p-1} = 0$ et $\lambda_1(f) > 0$ alors nous avons (i) pour tout tout $\lambda > 0$. En particulier si g satisfait (7.1.1) avec $Q < p-1$ alors $M_{p-1} = 0$. Dans le corollaire suivant nous déduisons de la proposition 4.3.8 des résultats d'existence et de multiplicité de solution renormalisée pour tout $\lambda > 0$ lorsque g satisfait (7.1.1) sans supposer que $\lambda_1(f) > 0$.*

Dans le cas où g est sous-linéaire, nous obtenons le corollaire suivant

Corollaire 7.1.3 *Supposons que β satisfait (3.1.1) avec $L = \infty$ et g satisfait (7.1.1) avec $Q < p-1$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $r \in (1, N/p)$ telle que $Qr' < Q_1$.*

Alors :

(i) Pour tout $\lambda > 0$, il existe une solution renormalisée u de $(P_{u,\lambda})$ telle que $v = \Psi(u)$ satisfait

$$v^d \in L^1(\Omega) \quad \textit{pour} \quad d = Nr(p-1-Q)/(N-pr),$$

et alors $u^d \in L^1(\Omega)$. Si $(Q+1)r' \leq p^*$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Si $(Q+1)r' > p^*$, alors

$$|\nabla u|^\theta \in L^1(\Omega) \quad \textit{pour} \quad \theta = Nr(p-1-Q)/(N-(Q+1)r).$$

(ii) Si $\beta \notin L^1((0,\infty)))$ alors pour tout $\lambda > 0$, il existe une infinité de solutions u_s de $(P_{u,\lambda})$ moins régulières que u.

Preuve. (i) résulte par la proposition 4.3.8 , le théorème 3.1.2 et le fait que $u \leq v$ et $\nabla u = \nabla v/(1+g(v))$. La multiplicité est obtenue par (i) du théorème 2.11 et le théorème 3.1.2. ■

Dans le cas où g sur-linéaire et sous-critique, nous obtenons le résultat suivant

Corollaire 7.1.4 *Supposons que β satisfait (3.1.1) avec $L = \infty$ et que (7.1.1) avec $p-1 < Q < Q_1$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $Qr' < Q_1$.*

Alors pour tout $\lambda \in (0, \lambda_r)$, il existe une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de $(P_{u,\lambda})$.

Si de plus $\beta \notin L^1((0,\infty)))$ alors pour λ assez petit $(P_{u,\lambda})$ admet une infinité de solution moins régulières que u.

Preuve. Ce corollaire résulte de la proposition 4.3.10, (ii) du théorème 2.11 et le théorème 3.1.2. ■

L'exemple explicite de multiplicité de [7] a été la motivation essentielle pour notre étude de la connexion entre $(P_{u,\lambda})$ et $(P_{v,\lambda})$. En fait, dans le cas $\lambda f = 0$, le phénomène de multiplicité est plus général grâce à notre résultat. Comme simple application du théorème 3.1.2, mentionnons le résultat de multiplicité suivant :

Corollaire 7.1.5 *Pour tout $\beta \notin L^1(0,\infty)$, $\beta \not\equiv 0$ le problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u)\,|\nabla u|^p & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une infinité de solutions renormalisées.

Maintenant, nous traitons l'existence d'une solution minimale, la fonction extrémale et l'existence d'une deuxième solution bornée pour λ petit :

Corollaire 7.1.6 *(i) Supposons (3.1.1), et $f \in L^r(\Omega), r > N/p$. Alors pour $\lambda > 0$ assez petite, il existe une solution minimale $\underline{u}_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de $(P_{u,\lambda})$, avec $\|\underline{u}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < L$.*

(ii) Supposons de plus que $t\beta(t)$ est croissante, et $f \not\equiv 0$. Alors il existe $\lambda^* > 0$ telle que pour tout $\lambda \in (0,\lambda^*)$ il existe une solution minimale $\underline{u}_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ de $(P_{u,\lambda})$ avec $\|\underline{u}_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} < L$.

Si de plus $\liminf\limits_{t\to L} \beta(t) > 0$ alors pour tout $\lambda > \lambda^*$ le problème $(P_{u,\lambda})$ n'a pas de solution renormalisée bornée.

Preuve. (i) résulte de la proposition 4.2.1 et (ii) résulte du théorème 4.3.3, puisque la preuve est faite sous la condition $t\beta(t)$ est croissante. La non-existence résulte de (ii) de la proposition 6.1.2. ■

Remarque 7.1.7 *Par [3, remarque 2.5], le problème $(P_{u,\lambda})$ n'a pas de solution renormalisée pour λ assez grand si $\liminf\limits_{t\to\infty} \beta(t) > 0$, puisque dans ce cas une solution renormalisée appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$, d'après la remarque 3.3.1.*

Par les théorèmes 5.1.2, et 5.1.1 et la remarque 3.3.1, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 7.1.8 *Supposons que β satisfait (3.1.1) et $f \in L^r(\Omega), r > N/p$, $f \not\equiv 0$. Supposons que β est croissante au voisinage de L et*

$$\lim_{t\longrightarrow L} \beta(t) = \infty, \qquad et \qquad e^{\gamma(t)/(p-1)} \notin L^1(\Omega).$$

(i) Alors $u^* = \sup\limits_{\lambda\nearrow\lambda^*} \underline{u}_\lambda$ est une solution de $(P_{u,\lambda})$, et $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Si une des conditions (i), (ii) du théorème 5.1.2 est satisfaite, alors

$$\|u^*\|_{L^\infty(\Omega)} < L.$$

(ii) Supposons de plus que (7.1.1) est satisfaite avec $Q < Q^*$, et $f \in L^r(\Omega)$ avec $(Q+1)r' < p^*$. Alors il existe $\lambda_0 > 0$ telle que pour tout $\lambda \in (0,\lambda_0)$ il existe au moins deux solutions de $(P_{u,\lambda})$ telles que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < L$.

Quand $p = 2$ et β est croissante nous avons $\lambda_0 = \lambda^*$.

7.1.2 Problème $(P_{u,\lambda})$ avec mesure

Ici nous présentons les résultats que nous avons obtenus sur le problème $(P_{u,\lambda})$ avec mesure singulière positive $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \beta(u)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x) + \alpha_s & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.1.3}$$

Nous avons le résultat de non-existence suivant

Corollaire 7.1.9 *Supposons que β satisfait (3.1.1) avec $L = \infty$, f satisfaisant 1.5, $f \not\equiv 0$. Alors*

(i) Si $\beta \notin L^1((0,\infty))$ et $\alpha_s \neq 0$ alors le problème (7.1.3) n'a pas de solution renormalisée.

(ii) Si $p = 2$ ou $p = N$ et $\liminf\limits_{s\to\infty} g(s)/s > 0$ alors il existe λ_r telle que le problème (7.1.3) n'a pas de solution renormalisée pour tout $\lambda > \lambda_r$.

Preuve. (i) Si $\beta \notin L^1((0,\infty))$, alors par le théorème 3.1.1, $\alpha_s = 0$ si (7.1.3) admet une solution renormalisée.

(ii) Dans le cas $p = 2$ ou $p = N$ il y a une équivalence entre les deux problèmes (7.1.3) et (3.1.11) au sens renormalisé, d'après le théorème 2.1. Et on conclut par (ii) de la proposition 6.1.2. ■

Remarque 7.1.10 *(i) En particulier dans le cas $\lambda_1(f) = 0$, si $p = 2$ ou $p = N$ alors il n'existe pas de solution renormalisée pour tout $\lambda > 0$. Dans le cas β constant le résultat est vrai pour p quelconque.*

(ii) L'hypothèse $\liminf\limits_{s\to\infty} g(s)/s > 0$ est satisfaite si $\liminf\limits_{t\to\infty} \beta(t) > 0$, d'après (i) de la proposition 3.2.6.

(iii) Il est difficile de déduire la non-existence pour problème $(P_{u,\lambda})$ en utilisant les résultats de non-existence de solutions renormalisées sur le problème $(P_{v,\lambda})$ dans le cas $\beta \notin L^1((0,\infty))$. En fait, dans ce cas, si il existe une solution renormalisée de $(P_{u,\lambda})$ alors $v = \Psi(u)$ n'est pas nécessairement une solution renormalisée de $(P_{v,\lambda})$, à l'exeption du cas $p = 2$ ou $p = N$.

Remarque 7.1.11 *Dans [8], l'auteur montre un résultat d'existence pour le problème avec donnée mesure quelconque $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ suivant :*

$$\begin{cases} -\Delta_p U = \beta(U)\,|\nabla U|^p + \mu & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad U = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

sous le seule hypothèse $\beta \in L^1(\mathbb{R})$. Il donne un contre-exemple où $\beta \notin L^1(\mathbb{R})$ et μ est une masse de Dirac montrant que son résultat d'existence est optimal, voir l'exemple 2.3.

Dans (i) du corollaire précédent nous améliorons et nous étendons la non-existence pour tout $\beta \notin L^1((0,\infty))$ et $\alpha_s \neq 0$.
En appliquant son résultat d'existence, en prolongeant β par 0, on obtient l'existence pour le problème (7.1.3) quand $\beta \in L^1((0,\infty))$. Par le corollaire suivant nous retrouvons cette existence en appliquant nos résultats. Nous obtenons de plus un résultat d'unicité.

Corollaire 7.1.12 *Supposons que β satisfait (3.1.1) avec $L = \infty$ et $\beta \in L^1((0,\infty))$. Soit $\alpha_s \in \mathcal{M}_s^+(\Omega)$.*
Alors le problème (7.1.3) *admet une solution renormalisée u_s pour tout $\lambda \geq 0$.*
De plus, si $\lambda f = 0$ alors :

(i) Si $p = 2$ ou $p = N$ alors u_s est unique.

(ii) Si $\alpha_s = 0$ alors la solution triviale est l'unique solution .

7.2 Signification de (7.1.1) en terme de β et remarques

Il n'est pas facile de vérifier la condition (7.1.2), équivalente à (7.1.1). La condition

$$\limsup_{t\longrightarrow L} \frac{\beta(t)}{\Psi^{Q/(p-1)-1}(t)} < \infty \tag{7.2.1}$$

est suffisante pour que (7.1.2) soit satisfaite et si de plus β est croissante les deux conditions sont équivalentes, en utilisant la règle de l'Hôpital. En effet

$$\frac{(e^{\gamma(t)/(p-1)})'}{(\Psi^{Q/(p-1)}(t))'} = \frac{\gamma'(t)e^{\gamma(t)/(p-1)}}{Q(\Psi^{Q/(p-1)-1}(t))\Psi'(t)} = \frac{\beta(t)}{Q\Psi^{Q/(p-1)-1}(t)}.$$

Remarque 7.2.1 *Si $\beta = \beta_1 + \beta_2$, où $\beta_1 \in L^1((0,L))$ et $\Lambda_2 = \infty$ et β_2 satisfait (7.1.2), alors β satisfait (7.1.2).*
En effet, posons $v = \Psi(u)$, $v_1 = \Psi_1(u)$ et $v_2 = \Psi_2(u)$, nous avons $v_2 \leq v$ et

$$\frac{1+g(v)}{v^q} \leq e^{\gamma(L)/(p-1)}\frac{1+g_2(v_2)}{v^q} \leq e^{\gamma(L)/(p-1)}\frac{1+g_2(v_2)}{v_2^q}.$$

En particulier (7.1.2) est satisfaite avec $Q = p-1$ pour toute fonction β de cette forme , telle que β_2 est bornée.

Par le lemme suivant nous donnons une condition simple sur β qui assure (7.1.2) :

Lemme 7.2.2 *Supposons que $\beta \in C^1([0,L))$, et $L = \infty$ ou $L < \infty$ et $e^{\gamma(\theta)/(p-1)} \notin L^1((0,L))$. Supposons qu'il existe un $Q > 0$ tel que*

$$\limsup_{t\longrightarrow L} \frac{(p-1)\beta'(t)}{\beta^2(t)} \leq 1 - \frac{p-1}{Q}. \tag{7.2.2}$$

Alors (7.1.2) est satisfaite.

Preuve. Rappelons que $\beta(t) = (p-1)g'(\Psi(t))$. Alors pour tout $t \in (0, L)$:

$$\frac{(p-1)\beta'(t)}{\beta^2(t)} = \frac{g''(\Psi(t))\Psi'(t)}{(g'(\Psi(t))^2} = \frac{g''(\Psi(t))e^{\gamma(t)/(p-1)}}{(g'(\Psi(t))^2} = \frac{g''(\Psi(t))g(\Psi(t))}{(g'(\Psi(t))^2}.$$

Les hypothèses sur β impliquent $\Lambda = \infty$ et

$$\limsup_{t \longrightarrow L} \frac{(p-1)\beta'(t)}{\beta^2(t)} = \limsup_{t \longrightarrow L} \frac{gg''}{g'^2}(\Psi(t)) = \limsup_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{gg''}{g'^2}(\tau) \leq 1 - \frac{Q}{p-1};$$

par (7.2.2). Donc pour $\theta = (p-1)/Q > 0$ et τ assez grand

$$\frac{gg''}{g'^2}(\tau) \leq 1 - \theta,$$

d'où

$$(g^\theta)'' = \theta g^{\theta-2}(\theta - 1)g'^2 + gg'' \leq 0,$$

c'est à dire $g^{(p-1)/Q}$ est concave au voisinage ∞, donc elle est au plus linéaire. ■

Remarque 7.2.3 *D'après [1], il y a beaucoup de fonctions "élémentaires" croissantes β définies sur $[0, \infty)$ qui satisfaisent la condition (7.1.2) pour* ***tout*** *$Q > p - 1$.*
Dans les exemples de la section 3.2.2, nous avons vu que pour $\beta(u) = u^m$, $m > 0$, $g(v) = O(v(\ln v)^{m/(m+1)})$ au voisinage de ∞.
Pour $\beta(u) = e^u$, $g(v) = O(v \ln v)$ au voisinage de ∞.
Pour $\beta(u) = e^{e^u + u} + e^u + 1$, $g(v) = O(v \ln v \ln(\ln v))$.
Dans tout ces cas, $\limsup\limits_{t \longrightarrow \infty} (\beta'/\beta^2)(t) = 0$.

Dans [1] et [6], la question suivante reste ouverte : est-ce-que **toute** fonction croissante β definie sur $[0, \infty)$ satisfait (7.1.2) pour un certain $Q > p - 1$. Dans le lemme suivant nous montrons que la condition (7.1.2) **n'est pas toujours satisfaite**, même avec Q large, même quand τ^Q est remplacée par une exponentielle :

Lemme 7.2.4 *Considérons une fonction $F \in C^0([0, \infty))$ strictement convexe, avec*

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} F(s) = \infty.$$

Alors il existe une fonction $\beta \in C^0([0, \infty))$, croissante avec $\beta(0) \geq 0$, $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} \beta(t) = \infty$ telle que la fonction correspondante g donnée par (3.1.4) satisfait

$$\limsup_{\tau \longrightarrow \infty} \frac{g(\tau)}{F(\tau)} = \infty. \tag{7.2.3}$$

Preuve. Il suffit de montrer l'existence d'une fonction g qui satisfait (7.2.3) telle que $g \in C^1([0,\infty))$, convexe, avec $\lim_{s\longrightarrow\infty} g(s)/s = \infty$, et

$$1/(1+g(s)) \notin L^1\left((0,\infty)\right).$$

En effet si on construit une telle fonction g alors sa fonction correspondante $\beta = T^{-1}(g)$ est définie sur $[0,\infty)$, d'après (3.2.5) de la proposition 3.2.4 ; elle est croissante car g est convexe, voir la remarque 3.2.3 et elle tend vers ∞ si $t \to \infty$, d'après (ii) de la proposition 3.2.6.

Tout d'abord, nous construisons une fonction g qui est seulement continue. Soit $\mathcal{F}$ la courbe représentative de F. Posons $g(s) = 0$ pour $s \in [0,1]$. Il existe $m_1 > 1$ tel que la ligne droite de pente m_1 passant par $(1,0)$ coupe $\mathcal{F}$ en deux points $s_1' < s_1''$. On choisit $s_1 > s_1''$ tel que $s_1 - 1 \geq (1+g(1))e^{m_1}$, c'est à dire $s_1 \geq 1 + e^{m_1}$. Nous définissons $g(s) = m_1(s-1)$ pour tout $s \in [1, s_1]$. Alors

$$\int_1^{s_1} ds/(1+g(s) = m_1^{-1}\ln(1+m_1(s_1-1) \geq m_1^{-1}\ln(1+m_1e^{m_1}) \geq 1,$$

et le point $(s_1, g(s_1))$ est en dessous de $\mathcal{F}$. Par induction pour tout $n \geq 1$, nous considérons $m_n > 2m_{n-1}$ tel que la ligne droite de pente m_n passant par $(s_{n-1}, g(s_{n-1}))$ coupe la courbe $\mathcal{F}_n$ definie par nF en deux points $s_n' < s_n''$. Nous définissons $g(s) = g(s_{n-1}) + m_n(s - s_{n-1})$ pour tout $s \in [s_{n-1}, s_n]$, où $s_n > s_n''$ est choisi de sorte que $s_n - s_{n-1} \geq (1+g(s_{n-1}))e^{m_n}$ et $s_n \geq 2s_{n-1}$. Alors

$$\int_{s_{n-1}}^{s_n} ds/(1+g(s) \geq 1.$$

La fonction g satisfait $1/(1+g(s)) \notin L^1\left((0,\infty)\right)$, et $g \geq nF$ sur $[s_n', s_n'']$, et $s_n' > s_n > 1$, donc elle satisfait (7.2.3) ; et $g(s_n) \geq m_n(s_n - s_{n-1}) \geq m_n s_n/2$, alors $\lim_{s\longrightarrow\infty} g(s)/s = \infty$. Finalement nous régularisons g aux voisinages des points s_n et nous obtenons une fonction de classe C^1 et convexe. ∎

7.3 Extensions et applications

1) Dans le théorème de connexion 2.1, nous pouvons supposer que f dépend aussi de u ou v. Si u est une solution du problème de la forme

$$-\Delta_p u = \beta(u)\left|\nabla u\right|^p + \lambda f(x,u),$$

où $f(x,u) \in L^1(\Omega)$, $f(x,u) \geq 0$, alors v est formellement une solution de

$$-\Delta_p v = \lambda f(x, H(v))(1+g(v))^{p-1}.$$

Inversement, si v est une solution du problème de la forme

$$-\Delta_p v = \lambda f(x,v)(1+g(v))^{p-1},$$

alors formellement u est une solution de

$$-\Delta_p u = \beta(u)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x, \Psi(u)).$$

Ce qui étend **fortement** le domaine des applications de notre résultat.

Remarque 7.3.1 *Cet argument a été un point essentiel dans la preuve du théorème 4.3.1 (ce théorème a été le point clé pour établir le théorème 4.3.3 qui couvre en particulier le théorème 2.8) : nous utilisons le fait que , pour tout g satisfaisant (4.1.2) avec $\Lambda = \infty$, et tout $v \in \mathcal{W}(\Omega)$, telle que $-\Delta_p v = F \geq 0$, alors $u = H(v) \in \mathcal{W}$ et elle est une solution de l'équation*

$$-\Delta_p u = \beta(u)\,|\nabla u|^p + Fe^{-\gamma(u)}.$$

Maintenant, nous donnons un exemple simple d'application :

Corollaire 7.3.2 *Soit $\omega \in C^1([0,\infty))$ une fonction positive et croissante , et $f \in L^r(\Omega)\,, r > N/p$. Considérons le problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = (p-1)\,|\nabla u|^p + \lambda f(x)(1+\omega(u))^{p-1} & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

(i) Alors pour $\lambda > 0$ petit, il existe une solution dans $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

(ii) Supposons que $\limsup\limits_{t\longrightarrow\infty} \omega(t)^{p-1}/e^{kt} < \infty$ pour un certain $k > 0$.

Si $r'(k+1) < N/(N-p)$ alors pour $\lambda > 0$ petit, il existe une infinité de solutions dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Si $r'(k/p'+1) < N/(N-p)$ et ω est convexe, il existe au moins deux solutions dans $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Preuve. Posons $v = e^u - 1$, alors v satisfait l'équation $-\Delta_p v = \lambda f(x)(1+\tilde{g}(v))^{p-1}$ dans Ω, où $1+\tilde{g}(v) = (1+v)(1+\omega(\ln(1+v)))$. Et $\tilde{g}$ satisfait (7.1.1) avec $Q = (p-1)(k+1)$, et elle est convexe quand ω est convexe. Nous déduisons les résultats par la proposition 4.2.1, et les théorèmes 2.1, 2.11 et 5.1.1. ■

Remarque 7.3.3 *En particulier pour tout $b > 0$, pour tout $f \in L^r(\Omega)\,, r > N/p$, et $\lambda > 0$ petit, le problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |\nabla u|^p + \lambda f(x)(1+u)^b & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une infinité de solutions dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, dont une solution au moins est bornée et deux solutions au moins sont bornées si $b \geq p-1$.

2) Aussi, le théorème 2.1 recouvre et précise le résultat récent de multiplicité de [2, théorème 3.1], relatif aux solutions radiales du problème avec une autre puissance de gradient :

Corollaire 7.3.4 *Soit $\Omega = B(0,1)$. Considérons le problème*

$$\begin{cases} -\Delta_m w = c\,|\nabla w|^q + \lambda f & \textit{dans} \quad \Omega, \\ \quad w = 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.3.1}$$

avec $m > 1$, $c > 0$ et $q \geq (m-1)N/(N-1)$, où f est radiale et

$$f \in L^k(\Omega), \quad k > N(q-m+1)/q.$$

Alors il existe $\tilde{\lambda} > 0$ tel que pour tout $\lambda < \tilde{\lambda}$, le problème (7.3.1) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ admet une infinité de solutions radiales, dont une solution est dans $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Preuve. Dans le cas radial, le problème (7.3.1) fait intervenir la dérivée w' :

$$-r^{1-N}(r^{N-1}\,|w'|^{m-2}\,w')' = c\,|w'|^q + \lambda f. \tag{7.3.2}$$

Considérons le changement de fonctions $w' = A\,|u'|^{p/q-1}\,u'$ avec $p = q/(q-m+1)$ et $A = (c/(p-1)^{-p/q}$. Nous avons

$$\frac{p}{q}(m-1) - 1 = \frac{m-1}{q-m+1} - 1 = \frac{2(m-1)-q}{q-m+1} = \frac{q}{q-m+1} - 2 = p-2,$$

donc

$$|w'|^{m-2}\,w' = A^{m-1}\,|u'|^{p(m-2)/q}\,|u'|^{p/q-1}\,u' = A^{m-1}\,|u'|^{p(m-1)/q-1}\,u' = A^{m-1}\,|u'|^{p-2}\,u',$$

et $A^{m-1} = (c/(p-1)^{-p(m-1)/q} = (c/(p-1)^{-p+1}$ et $c\,|w'|^q = cA^q\,|u'|^p = c(c/(p-1)^{-p}\,|u'|^p = (p-1)(c/(p-1)^{-p+1}\,|u'|^p = (p-1)A^{m-1}\,|u'|^p$. Donc en substituant dans (7.3.2) et en divisant par A^{m-1}, l'équation se réduit formellement à

$$-r^{1-N}(r^{N-1}\,|u'|^{p-2}\,u')' = (p-1)\,|u'|^p + \rho f, \tag{7.3.3}$$

où $\rho = A^{1-m}\lambda = (c/(p-1))^{p-1}\lambda$.
Puisque $m > 1$ on a $1 < q/(q-m+1)$ et

$$q \geq (m-1)N/(N-1) \Leftrightarrow q/(q-m+1) \leq N,$$

donc $1 < p \leq N$,. Par hypothèse, on a $f \in L^s(\Omega)\,, s > N/p$. Par le théorème 3.1.3, pour tout $\rho < \lambda_1(f)$ où $\lambda_1(f)$ est définie par (3.1.14), et pour toute mesure $\mu_s \in \mathcal{M}_s^+(B(0,1))$ il existe une solution renormalisée positive v_s du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v_s = \rho f(1+v_s)^{p-1} + \mu_s & \text{dans} \quad \Omega, \\ \quad v_s = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega; \end{cases} \tag{7.3.4}$$

donc il existe une infinité de solutions positives $u_s = \ln(1+v_s) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de

$$-\Delta_p u_s = (p-1)\left|\nabla u_s\right|^p + \rho f \quad \text{dans } \Omega.$$

Prenons $\mu_{s,a} = a\delta_0$, avec $a > 0$. Alors (7.3.4) admet au moins une solution radiale $v_{s,a}$, obtenue comme dans le théorème 6.1.1 par le théorème de Schauder pour les fonctions radiales. Alors $u = u_{s,a}$ est radiale, et $r \mapsto u(r)$ satisfait (7.3.3) dans $\mathcal{D}'((0,1))$, d'où $u \in C^1((0,1])$ et $u'(r) < 0$. Alors

$$w(r) = -A\int_r^1 \left|u'\right|^{p/q-1} u' ds \in C^1((0,1]),$$

$w(r) \geq 0$ et w satisfait (7.3.4) in $\mathcal{D}'((0,1))$ avec $\lambda = ((p-1)/c)^{p-1}\rho$.
De plus $x \mapsto w'(|x|) \in L^q(\Omega\backslash\{0\})$, et $\{0\}$ a une p-capacité 0 puisque $p \leq N$, donc $w \in W_0^{1,q}(\Omega)$, d'où $\left|\nabla w\right|^{m-1} \in L^{p'}(\Omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi_n \in \mathcal{D}((\Omega\backslash\{0\})$ convergeant vers φ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\nabla w\right|^{m-2}\nabla w.\nabla\varphi_n dx &= A^{m-1}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u.\nabla\varphi_n dx \\ &= A^{m-1}\int_\Omega ((p-1)\left|\nabla u\right|^p + \rho f)\varphi_n dx = \int_\Omega (c\left|\nabla w\right|^q + \rho f)\varphi_n dx;\end{aligned}$$

et en passant à la limite, nous trouvons que w est une solution de (7.3.1) dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors il existe une infinité de solutions radiales de (7.3.1) pour tout $\lambda < \tilde{\lambda} = ((p-1)/c)^{p-1}\lambda_1(f)$. En considérant $\mu_{s,a} = 0$, le problème en u admet une solution radiale bornée $u_0 \in C^1([0,1])$, donc (7.3.1) admet une solution radiale $w_0 \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. ■

Remarque 7.3.5 *De plus, puisque $v = v_{s,a}$ est radiale, par les hypothèses sur f, nous pouvons savoir le comportement des solutions singulières au voisinage de 0. Nous distinguons deux cas :*

(i) ***Cas 1.*** *Si $q > (m-1)N/(N-1)$, c'est à dire $p < N$, alors il existe $l > 0$ telle que*

$$\lim_{r\to 0} r^{(N-p)/(p-1)}v(r) = l \qquad \text{et} \qquad \lim_{r\to 0} r^{(N-1)/(p-1)}v'(r) = l(p-N)/(p-1).$$

où $v(r) = v(|x|) = v(x)$. En effet $v \in C^1(B(0,1)\backslash\{0\})$ est solution de

$$-\Delta_p v = \rho f(1+v)^{p-1} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(B(0,1)\backslash\{0\}). \tag{7.3.5}$$

En d'autres termes

$$-(r^{N-1}\left|v_r\right|^{p-2}v_r)_r = r^{N-1}\rho f(1+v)^{p-1} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'((0,1)).$$

Considérons le changement de variable

$$v(r) = V(t), \qquad f(r) = F(t), \qquad t = r^{(p-N)/(p-1)}.$$

Alors $V \in C^1([1,\infty))$ et satisfait

$$-(|V_t|^{p-2}V_t)_t = \rho F(t)(1+V)^{p-1} \qquad \text{dans } \mathcal{D}'((1,\infty)),$$

D'où V est concave.
Puisque $f \in L^k(B(0,1))$ avec $k > N/p$ et v est solution de (7.3.5), singulière en 0 alors nous déduisons d'après [10] qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$C_1 \leq r^{(N-p)/(p-1)}v(r) \leq C_2,$$

pour tout $x \in B(0,\epsilon)\setminus\{0\}$ avec ϵ assez petit. D'où

$$C_1 \leq V(t)/t \leq C_2, \qquad \text{pour } t \text{ suffisamment grande.}$$

Maintenent, par la concavité de V il est facile de voir que la fonction

$$t \to h(t) = \frac{V(t)-V(1)}{t-1} = \frac{V(t)}{t-1}$$

est décroissante. En écrivant $h(t) = \frac{V(t)}{t}(\frac{1}{1-1/t})$ on peut déduire que $h(t)$ est minorée par $C_1/2$ pour t assez grand. Alors il existe $l > 0$ telle que $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = l$. D'où $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)/t = l$. Donc

$$\lim_{r\to 0} r^{(N-p)/(p-1)}v(r) = l.$$

Puisque v est concave et $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)/t = l > 0$ nous obtenons $\lim\limits_{t\to\infty} V_t(t) = l$, qui implique

$$\lim_{r\to 0} r^{(N-1)/(p-1)}v'(r) = l(p-N)/(p-1).$$

De plus

$$l = (p-1)(N-p)^{-1}|S_{N-1}|^{-1/(p-1)}a^{1/(p-1)}.$$

En effet, pour ϵ assez petit et $\varphi \in \mathcal{D}(B(0,1))$ on a

$$\int_{\Omega_\epsilon} |\nabla v|^{p-2}\nabla v.\nabla\varphi\,dx = \rho\int_{\Omega_\epsilon} f(1+v)^{p-1}\varphi\,dx + \int_{\{|x|=\epsilon\}} |\nabla v|^{p-2}\nabla v.\frac{x}{|x|}\varphi\,dS_\epsilon \tag{7.3.6}$$

Or v est radiale, donc

$$\begin{aligned}\int_{\{|x|=\epsilon\}} |\nabla v|^{p-2}\nabla v.\frac{x}{|x|}\varphi\,dx &= \int_{\{|x|=\epsilon\}} |v'(\epsilon)|^{p-2}v'(\epsilon)\varphi(\epsilon)\,dS_\epsilon \\ &= \int_{\{|x|=1\}} \epsilon^{N-1}|v'(\epsilon)|^{p-2}v'(\epsilon)\varphi(\epsilon)\,dS_1\end{aligned}$$

qui tend vers $\underline{L}\varphi(0)$ avec $\underline{L} = \left(\frac{(N-p)l}{p-1}\right)^{p-1}|S_{N-1}|$ où $|S_{N-1}| = \int_{\{|x|=1\}} dS_1$. Donc, faisant tendre ϵ vers 0 dans (7.3.6) nous obtenons

$$-\Delta_p v = \rho f(1+v)^{p-1} + \underline{L}\delta_0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(B(0,1)).$$

Donc $\underline{L} = a$. *D'où nous trouvons la valeur de* l.

Et $u' = v'/(1+v)$, *donc* $|u'|^{p/q-1}\, u' = -((N-p)/(p-1)r)^{-p/q}(1+o(1))$. *Si* $q > m$, *c'est à dire si* $q > p$, *alors* w *est bornée, la singularité apparaît au niveau du gradient . Si* $q < m$, *alors* $w(r) = Cr^{-(m-q)/(q-m+1)}(1+o(1))$, *avec* $C = C(N, m, q, c)$. *Si* $q = m-1$, *alors* $w(r) = C(-\ln r)^{-1}(1+o(1))$.

(ii) ***Cas 2.*** *Si* $q = (m-1)N/(N-1)$, *alors* $p = N$. *Dans ce cas nous utilisons le changement de variable*

$$v(r) = V(t), \qquad t = -\ln r,$$

et nous trouvons

$$\lim_{r\to 0}(-\ln r)^{-1}v(r) = c_N a^{1/(N-1)} \qquad \textit{et} \qquad \lim_{r\to 0} rv'(r) = -c_N a^{1/(N-1)},$$

avec $c_N = |S_{N-1}|^{-1/(N-1)}$.

Et $|u'|^{p/q-1}\, u' = -(r(-\ln r))^{-(N-1)/(m-1)}(1+o(1))$. *Si* $N < m$, *alors* w *est bornée ; si* $N > m$, *alors* $w = C(-\ln r)^{-(N-1)/(m-1)} r^{-(N-m)/(m-1)}(1+o(1))$, *avec* $C = C(N, m, c)$. *Si* $N = m$, *alors* $w = C(\ln(-\ln r)(1+o(1))$.

7.4 Un résultat d'existence pour des opérateurs plus généraux

On considère le problème non linéaire suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x,u,\nabla u)) = B(x,u,\nabla u) + \lambda f & \text{dans} \quad \Omega \\ \qquad u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.4.1}$$

où Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$, avec $N > 1$, p est un réel tel que $1 < p < N$ et $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ et $B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \times\mathbb{R}$ sont deux fonctions de Carathéodory vérifiant les hypothèses suivantes :

(HA) Ils existent deux constantes $\alpha > 0$, $\beta_0 > 0$, et une fonction positive $b_0 \in L^{\frac{N}{p-1}}$ telles que

$$(A(x,s,\xi) - A(x,s,\eta))(\xi - \eta) > 0, \tag{7.4.2}$$

$$A(x,s,\xi).\xi \geq \alpha\, |\xi|^p, \tag{7.4.3}$$

$$|A(x,s,\xi)| \leq \beta_0(b_0(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) \tag{7.4.4}$$

pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, avec $\xi \neq \eta$.

(HB) Ils existent deux constantes $\gamma > 0$ et $\gamma_0 \geq 0$ telles que

$$-\gamma_0 A(x,s,\xi).\xi \leq B(x,s,\xi)\mathrm{sign}(s) \leq \gamma\, A(x,s,\xi).\xi \tag{7.4.5}$$

pour presque tout $x \in \Omega$, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$.
Finalement, on suppose que f vérifie

$$f \in L^1(\Omega), \quad f \not\equiv 0 \tag{7.4.6}$$

On note

$$\lambda_1(f) = \inf_{\substack{w \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ w \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla w|^p \, dx}{\int_\Omega |f| \, |w|^p \, dx}. \tag{7.4.7}$$

On va montrer le résultat suivant qui étend le corollaire 7.1.1 à des opérateurs plus généraux, et améliore un résultat de [16] où f est supposée dans $L^{N/p}(\Omega)$.

Théorème 7.4.1 *Supposons que les hypothèses (HA), (HB) et (7.4.6) soient vérifiées. Si $\lambda_1(f) > 0$, alors pour tout $\lambda > 0$ telle que*

$$\gamma^{p-1}\lambda < (p-1)^{p-1}\alpha\lambda_1(f) \tag{7.4.8}$$

il existe au moins une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (7.4.1), qui vérifie la régularité exponentielle suivante

$$(e^{\theta|u|/(p-1)} - 1)\mathrm{sign}(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{7.4.9}$$

pour tout $\theta > 0$ tel que

$$\theta^{p-1}\lambda < (p-1)^{p-1}\alpha\lambda_1(f) \tag{7.4.10}$$

Preuve. On va suivre **très fidèlement** les étapes de la démonstration du [7, théorème 2.1] avec les différences suivantes :

1) Dans leur démonstration, les auteurs considèrent une suite d'approximation quelconque de f qui converge fortement $L^{N/p}(\Omega)$. Ici, nous considérons une approximation particulière de f :

$$f_n = \max(-n, \min(f, n)).$$

Dans de l'étape 2 de leur démonstration, les auteurs utilisent l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Sobolev et la convergence forte dans $L^{N/p}(\Omega)$ de la suite d'approximation de f pour établir l'estimation à priori. Ils ont aussi utilisé l'inégalité de Hölder et la convergence forte dans $L^{N/p}(\Omega)$ de la suite d'approximation de f pour montrer l'équi-integrabilité dans l'étape 5. Ici, dans l' étape 2 et la preuve de la convergence (7.4.27) de l'étape 5, nous utilisons le fait $|f_n| \leq f$ et que l'hypothèse $\lambda_1(f) > 0$ implique

$$\int_\Omega |f| \, |v|^p \, dx \leq \lambda_1(f)^{-1} \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx, \tag{7.4.11}$$

pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

2) Dans l'étape 4 nous donnons une démonstration plus simple en utilisant une estimation a priori de l'étape 2. On peut aussi adapter leur démonstration en utilisant le fait que

$|f|\,(C+|v|)^{p-1} \in L^1(\Omega)$ pour tout $C>0$ et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si $\lambda_1(f)>0$ (voir la section 3.4.1).

Étape 1 : Approximation. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définie

$$f_n = \max(-n, \min(f,n)) = T_n(f), \quad B_n(x,s,\xi) = \frac{B(x,s,\xi)}{1+\frac{1}{n}B(x,s,\xi)} \tag{7.4.12}$$

et considerons le problème d'approximation

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x,u_n,\nabla u_n)) = B_n(x,u_n,\nabla u_n) + \lambda f_n & \text{dans} \quad \Omega \\ \quad u_n = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.4.13}$$

Puisque $|B_n(x,s,\xi)| \leq n$ et A vérifie l'hypothèse (HA), alors d'après le résultat classique de Leray et Lions (voir [9]) il existe au moins une solution $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Puisque le second membre de l'équation est borné, alors la solution u_n est bornée.

Étape 2 : Estimation a priori. Fixons un $\theta \geq \gamma$ qui vérifie (7.4.10) et on définit la fonction

$$v_n = ((e^{\nu|u_n|}-1)\mathrm{sign}(u_n))/\nu, \quad \text{où } \nu = \theta/(p-1) \tag{7.4.14}$$

Il est facile de remarquer les égalités suivantes

$$\nu + \theta = p\,\nu, \quad \nabla v_n = e^{\nu|u_n|}\nabla u_n, \quad e^{\theta|u_n|} = (1+\nu\,|v_n|)^{p-1} \tag{7.4.15}$$

La fonction définie par $\varphi_n = e^{\theta|u_n|}v_n$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec

$$\nabla \varphi_n = e^{\theta|u_n|}\nabla v_n + \theta\,|v_n|\,e^{\theta|u_n|}\nabla u_n$$

d'où, en considérant φ_n comme fonction test dans (7.4.13), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (e^{\theta|u_n|}A(x,u_n,\nabla u_n).\nabla v_n + \theta\,|v_n|\,e^{\theta|u_n|}A(x,u_n,\nabla u_n).\nabla u_n)\,dx \\ &= \lambda \int_\Omega f_n e^{\theta|u_n|}v_n\,dx + \int_\Omega B_n(x,u_n,\nabla u_n)e^{\theta|u_n|}v_n\,dx \\ &= \lambda \int_\Omega f_n e^{\theta|u_n|}v_n\,dx + \int_\Omega B_n(x,u_n,\nabla u_n)e^{\theta|u_n|}\,|v_n|\,\mathrm{sign}(u_n)\,dx \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} &\int_\Omega e^{\theta|u_n|}A(x,u_n,\nabla u_n).\nabla v_n\,dx = \lambda \int_\Omega f_n e^{\theta|u_n|}v_n\,dx \\ &+ \int_\Omega (B_n(x,u_n,\nabla u_n)\mathrm{sign}(u_n) - \theta\,A(x,u_n,\nabla u_n).\nabla u_n))\,e^{\theta|u_n|}\,|v_n|\,dx \end{aligned}$$

Remarquant que $|B_n(x,s,\xi)| \leq |B(x,s,\xi)|$, utilisons l'hypothèse (7.4.5) sur B, on obtient

$$\int_\Omega e^{\theta|u_n|}A(x,u_n,\nabla u_n).\nabla\, v_n\, dx \leq \lambda \int_\Omega |f_n|\, e^{\theta|u_n|}\, |v_n|\; dx$$
$$+ \int_\Omega (\gamma-\theta)A(x,u_n,\nabla u_n).\nabla\, u_n))e^{\theta|u_n|}\, |v_n|\; dx$$

Le dernier terme est négatif puisque $\theta \geq \gamma$ et A vérifie l'hypothèse de coercivité (7.4.3). Par conséquent, en tenant compte des égalités (7.4.15), on a

$$\int_\Omega e^{p\,\nu|u_n|}A(x,u_n,\nabla u_n).\nabla\, u_n\, dx \leq \lambda \int_\Omega |f_n|\,|v_n|\,(1+\nu\,|v_n|)^{p-1}dx$$

Par l'hypothèse (7.4.3), on a

$$\int_\Omega e^{p\,\nu|u_n|}A(x,u_n,\nabla u_n).\nabla\, u_n\, dx \geq \alpha \int_\Omega e^{p\,\nu|u_n|}\,|\nabla\, u_n|^p\, dx = \alpha \int_\Omega |\nabla\, v_n|^p\, dx$$

par suite en combinant les deux inégalités précédentes, puis d'après (7.4.11) en utilisant l'inégalité $(1+r)^p \leq (1+\epsilon)r^p + C(\epsilon,p)$ pour tout $r \geq 0$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega |\nabla\, v_n|^p\, dx &\leq \lambda \int_\Omega |f_n|\,|v_n|\,(1+\nu\,|v_n|)^{p-1}dx \\
&\leq \frac{\lambda}{\nu}\int_\Omega |f|\,(1+\nu\,|v_n|)^p dx \\
&\leq \frac{\lambda(1+\epsilon)\nu^p}{\nu}\int_\Omega |f|\,|v_n|^p\, dx + \frac{\lambda}{\nu}\, C(\epsilon,p)\,\|f\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq \frac{\lambda(1+\epsilon)\nu^{p-1}}{\lambda_1(f)}\int_\Omega |\nabla\, v_n|^p\, dx + \frac{\lambda}{\nu}\, C(\epsilon,p)\,\|f\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

donc

$$(\alpha - \frac{\lambda(1+\epsilon)\nu^{p-1}}{\lambda_1(f)})\int_\Omega |\nabla\, v_n|^p\, dx \leq\; C(\lambda,\nu,\epsilon,p,\|f\|_{L^1(\Omega)})$$

Pour $\theta > 0$ verifiant (7.4.10) on peut choisir ϵ telle que $0 < \epsilon < \frac{\alpha\lambda_1(f)-\nu^{p-1}\lambda}{\nu^{p-1}\lambda}$, c'est à dire $\alpha - \frac{\lambda(1+\epsilon)\nu^{p-1}}{\lambda_1(f)} > 0$, par consequent on conclut qu'il existe $C > 0$ qui ne dépend pas de n telle que

$$\int_\Omega |\nabla\, v_n|^p\, dx \leq\; C. \tag{7.4.16}$$

Donc

$$v_n \text{ est bornée dans } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{7.4.17}$$

Puisque $u_n = \dfrac{1}{\nu}\log(1+\nu\,|v_n|)\mathrm{sign}(v_n)$, alors

$$\nabla\, u_n = \frac{\nabla\, v_n}{1+\nu\,|v_n|} \tag{7.4.18}$$

par suite $|\nabla u_n| \leq |\nabla v_n|$, donc par (7.4.17) on déduit que

$$u_n \text{ est bornée dans } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{7.4.19}$$

Étape 3 : Preuve de la régularité (7.4.9). Par (7.4.19) et (7.4.17), il existe deux sous suites encore notées u_n et v_n, deux fonctions $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telles que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et presque partout dans } \Omega,$$

$$v_n \rightharpoonup v \text{ faiblement dans } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ et presque partout dans } \Omega,$$

où

$$v = ((e^{\nu|u|}-1)\mathrm{sign}(u))/\nu, \quad \text{avec } \nu = \theta/(p-1).$$

Considérons maintenant un autre θ, noté θ', telle que $\theta' \geq \gamma$ et

$$(\theta')^{p-1}\lambda < (p-1)^{p-1}\alpha\lambda_1(f).$$

Posons

$$v_n' = ((e^{\nu'|u_n|}-1)\mathrm{sign}(u_n))/\nu', \quad \text{où } \nu' = \theta/(p-1).$$

L'estimation à priori (7.4.16) montre que v_n' est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. D'où on déduit que

$$(e^{\theta'|u|/(p-1)}-1)\mathrm{sign}(u) \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

pour tout θ', telle que

$$\theta' \geq \gamma \quad \text{et} \quad (\theta')^{p-1}\lambda < (p-1)^{p-1}\alpha\lambda_1(f).$$

Ce qui implique la régularité (7.4.9) pour tout $\theta > 0$ satisfaisant (7.4.10). En effet, puisque γ vérifie (7.4.8) alors on conclut la régularité pour $0 < \theta < \gamma$.

Étape 4 : Estimation pour $\displaystyle\int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla u_n|^p\,dx$.

Par (7.4.14) on a $e^{\nu|u_n|} = 1+\nu\,|v_n|$, donc $\{|u_n| > k\} = \big\{|v_n| > (e^{\nu\,k}-1)/\nu\big\}$. Par suite, en utilisant (7.4.18) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla u_n|^p\,dx &= \int_{\{|v_n|>(e^{\nu\,k}-1)/\nu\}} \frac{|\nabla v_n|^p}{(1+\nu\,|v_n|)^p}dx \\
&\leq \frac{1}{e^{\nu\,p\,k}} \int_{\{|v_n|>(e^{\nu\,k}-1)/\nu\}} |\nabla v_n|^p\,dx \\
&\leq \frac{1}{e^{\nu\,p\,k}} \int_\Omega |\nabla v_n|^p\,dx \leq C\,e^{-\nu\,p\,k}
\end{aligned}$$

où C est une constante qui ne dépend pas de n. D'où

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla u_n|^p \, dx \leq C\, e^{-\nu\, p\, k}$$

par conséquent

$$\lim_{k\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_{\{|u_n|>k\}} |\nabla u_n|^p \, dx = 0 \tag{7.4.20}$$

Étape 5 : Convergence forte des troncatures $T_k(u_n)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Fixons $k > 0$. Dans cette étape nous montrons que

$$\nabla T_k(u_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nabla T_k(u) \quad \text{fortement dans } (L^p(\Omega))^N. \tag{7.4.21}$$

Pour montrer cette convergence nous utilisons une technique dûe à Bebsoussan, Boccardo, Murat [1]. Nous définissons

$$w_n = T_k(u_n) - T_k(u)$$

Pour $\rho = (\gamma_0 + \theta)^2/4$, nous considérons la fonction

$$\psi(s) = s\, e^{\rho\, s^2} \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction est dérivable, croissante et satisfait

$$\psi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi' - (\gamma_0 + \theta)\, |\psi| \geq 1/2 \tag{7.4.22}$$

Puisque $w_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $\psi(0) = 0$ alors

$$y_n = \psi(w_n) e^{\theta|u_n|} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),$$

avec

$$\nabla y_n = \psi'(w_n) e^{\theta|u_n|} \nabla w_n + \psi(w_n) e^{\theta|u_n|} \mathrm{sign}(u_n) \nabla u_n$$

Prenons y_n comme fonction test dans (7.4.13) nous trouvons

$$J_n = I_n^1 + M_n \tag{7.4.23}$$

où

$$\begin{aligned}
J_n &:= \int_\Omega A(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla w_n\, \psi'(w_n) e^{\theta|u_n|} dx, \\
I_n^1 &:= \int_\Omega f_n \psi(w_n) e^{\theta|u_n|} dx, \\
M_n &:= \int_\Omega \left[B_n(x, u_n, \nabla u_n) \mathrm{sign}(u_n) - \theta A(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n\right] \psi(w_n) \mathrm{sign}(u_n) e^{\theta|u_n|} dx,
\end{aligned}$$

Posons

$$J_n^k = \int_{\{|u_n|\le k\}} [A(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)) - A(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\cdot \nabla w_n\, \psi'(w_n) e^{\theta|T_k(u_n)|}dx,$$

$$M_n^k = \int_{\{|u_n|\le k\}} (\gamma_0+\theta)\,[A(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n)) - A(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))]\cdot \nabla w_n\, |\psi(w_n)|\, e^{\theta|T_k(u_n)|}dx,$$

$$\overline{M}_n = \int_{\{|u_n|\le k\}} [B_n(x,u_n,\nabla u_n)\mathrm{sign}(u_n) - \theta A(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n]\,\psi(w_n)\mathrm{sign}(u_n) e^{\theta|T_k(u_n)|}dx,$$

$$I_n^2 = \int_{\{|u_n|\le k\}} A(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u))\cdot\nabla w_n\,\psi'(w_n)e^{\theta|T_k(u_n)|}dx,$$

$$I_n^3 = \int_{\{|u_n|> k\}} A(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla w_n\,\psi'(w_n)e^{\theta|u_n|}dx,$$

$$I_n^4 = \int_{\{|u_n|> k\}} [B_n(x,u_n,\nabla u_n)\mathrm{sign}(u_n) - \theta A(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n]\,\psi(w_n)\mathrm{sign}(u_n)e^{\theta|u_n|}dx,$$

$$I_n^5 = \int_{\{|u_n|\le k\}} (\gamma_0+\theta)A(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\cdot\nabla T_k(u)\,|\psi(w_n)|\, e^{\theta|T_k(u_n)|}dx,$$

$$I_n^6 = \int_{\{|u_n|\le k\}} (\gamma_0+\theta)A(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))\cdot\nabla w_n\,|\psi(w_n)|\, e^{\theta|T_k(u_n)|}dx.$$

En décomposant Ω en $\Omega = \{|u_n|\le k\}\cup\{|u_n|>k\}$, il est facile de voir que

$$J_n = J_n^k + I_n^2 + I_n^3$$

et

$$M_n = \overline{M}_n + I_n^4$$

Par suite, (7.4.23) devient

$$J_n^k + I_n^2 + I_n^3 = I_n^1 + \overline{M}_n + I_n^4 \tag{7.4.24}$$

En utilisant l'hypothèse (7.4.5)et $\gamma\le\theta$, nous avons

$$-\gamma_0 A(x,s,\xi).\xi \le\ B_n(x,s,\xi)\mathrm{sign}(s) \le \theta\, A(x,s,\xi).\xi \tag{7.4.25}$$

pour presque tout $x\in\Omega$, pour tout $s\in\mathbb{R}$ et tout $\xi\in\mathbb{R}^N$.

Donc

$$\begin{aligned}
\overline{M}_n &\le \int_{\{|u_n|\le k\}} |B_n(x,u_n,\nabla u_n)\mathrm{sign}(u_n) - \theta A(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n|\,|\psi(w_n)|\, e^{\theta|T_k(u_n)|}dx\\
&= \int_{\{|u_n|\le k\}} (\theta A(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n - B_n(x,u_n,\nabla u_n)\mathrm{sign}(u_n))\,|\psi(w_n)|\, e^{\theta|T_k(u_n)|}dx\\
&\le \int_{\{|u_n|\le k\}} (\theta+\gamma_0)(A(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n)\,|\psi(w_n)|\, e^{\theta|T_k(u_n)|}dx\\
&= M_n^k + I_n^5 + I_n^6.
\end{aligned}$$

Donc, par (7.4.24) nous obtenons

$$J_n^k + I_n^2 + I_n^3 \le I_n^1 + M_n^k + I_n^5 + I_n^6 + I_n^4$$

Par (7.4.22) nous avons

$$J_n^k - M_n^k \ge \frac{1}{2}\, I_n,$$

où

$$I_n = \int_{\{|u_n|\le k\}} [A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))] \cdot \nabla w_n\, dx.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2}\, I_n \le I_n^1 - I_n^2 - I_n^3 + I_n^4 + I_n^5 + I_n^6. \tag{7.4.26}$$

Dans la suite nous montrons que $I_n^4 \le 0$ et I_n^j tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ pour $j \ne 4$.

• $j = 1$. Nous allons montrer que

$$I_3^n = \int_\Omega \psi(w_n) e^{\theta|u_n|} f_n dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7.4.27}$$

En effet puisque $\psi(w_n)e^{\theta|u_n|}f_n = \psi(w_n)(1+\theta\,|v_n|)^{p-1} f_n$ converge presque partout vers 0 il suffit, d'après le théorème de la convergence de Vitali, de montrer que la suite est équi-integrable.

Puisque $|w_n| \le 2k$ alors il existe une constante $C(k)$ indépendante de n telle que $|\psi(w_n)| \le C(k)$. L'équi-integrabilité résulte du fait que pour tout Borélien B on a

$$\begin{aligned}
\int_B \left|\psi(w_n)(1+\theta\,|v_n|)^{p-1} f_n\right| dx &\le C(k) \int_B (1+\theta\,|v_n|)^{p-1}\,|f|\,dx \\
&= C(k)\Big(\int_B |f|^{1/p}\,|f|^{(p-1)/p}\,(1+\theta\,|v_n|)^{p-1} dx\Big) \\
&\le C(k)\Big(\int_B |f|\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_B |f|\,(1+\theta\,|v_n|)^p dx\Big)^{(p-1)/p} \\
&\le C(k) C_1\Big(\int_B |f|\,dx\Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

car en utilisant l'hypothèse $\lambda_1(f) > 0$ et (7.4.16) nous trouvons

$$\int_B |f|\,(1+\theta\,|v_n|)^p dx \le \int_\Omega |f|\,(1+\theta\,|v_n|)^p dx \le c(1+\lambda_1(f)^{-1} \int_\Omega |\nabla v_n|^p\, dx) \le C_1.$$

où $C_1 > 0$ est une constante indépendante de n.

• $j = 2$. Posons

$$\begin{aligned}
E_n^1 &= \chi_{\{|u_n|\le k\}} A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)) \psi'(w_n) e^{\theta|T_k(u_n)|}, \\
E_1 &= \chi_{\{|u|\le k\}} A(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \psi'(0) e^{\theta|T_k(u)|}.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de convergence de Vitali, et, sur l'ensemble $\{|u| = k\}$, le fait que $A(x,s,0) = 0$, nous avons

$$E_n^1 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} E_1 \quad \text{fortement dans } (L^{p'}(\Omega))^N.$$

où p' est le conjugué de p : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
Donc, puisque $\nabla w_n = \nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)$ tend vers 0 faiblement dans $(L^p(\Omega))^N$, I_n^2 tend vers 0.

• $j = 3$. D'abord, nous montrons que

$$E_n^2 = A(x,u_n,\nabla u_n)\psi'(w_n)e^{\theta|u_n|} \quad \text{est bornée dans } (L^{p'}(\Omega))^N. \tag{7.4.28}$$

En effet w_n (et donc $\psi'(w_n)$) est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. Posons $S = \sup_{n\geq 1} \|\psi'(w_n))\|_\infty^{p'}$. En utilisant l'hypothèse de croissance (7.4.4), les inégalités $e^{\theta|u_n|} = (1+\nu\,|v_n|)^{p-1}$ et $\nabla\, v_n = (1+\nu\,|v_n|)|)\nabla\, u_n$, nous trouvons

$$\begin{aligned}
\left|E_n^2\right|^{p'} &\leq S\beta_0^{p'}\left((b_0(x) + |u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1})(1+\nu\,|v_n|)^{p-1}\right)^{p'}\\
&= S\beta_0^{p'}\left(b_0(x)(1+\nu\,|v_n|)^{p-1} + |u_n|^{p-1}(1+\nu\,|v_n|)^{p-1} + |\nabla v_n|^{p-1}\right)^{p'}\\
&\leq c(p)S\beta_0^{p'}\left(b_0(x))^{p'}(1+\nu\,|v_n|)^{p} + |u_n|^{p}(1+\nu\,|v_n|)^{p} + |\nabla v_n|^{p}\right)
\end{aligned}$$

Notons $C(p) = c(p)S\beta_0^{p'}$. En utilisant l'inégalitié de Hölder avec $q = N/p$ et $q' = N/(N-p)$ nous obtenons

$$\left\|E_n^2\right\|_{p'}^{p'} \leq C(p)\left((\|b_0\|_{N/(p-1)}^{p'} + \|u_n\|_N^p)\,\|(1+\nu\,|v_n|)\|_{p^*}^p + \|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p\right).$$

D'où nous obtenons (7.4.28) puisque b_0 est supposée dans $L^{\frac{N}{p-1}}(\Omega)$ et puisque v_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui implique en particulier que u_n est bornée dans $L^N(\Omega)$.
D'autre part $\nabla w_n = \nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u_n)$, donc nous avons

$$\chi_{\{|u_n|>k\}}\nabla w_n = -\chi_{\{|u_n|>k\}}\nabla T_k(u_n) \to 0 \quad \text{fortement dans } (L^p(\Omega))^N.$$

Donc, par cette convergeance et (7.4.28), nous déduisons que I_n^3 tends vers 0.

• $j = 4$. Puisque ψ est croissante, nous avons

$$\chi_{\{|u_n|>k\}}\psi(w_n)\text{sign}(u_n) = \chi_{\{|u_n|>k\}}\psi(T_k(u_n) - T_k(u_n))\text{sign}(u_n) \geq 0$$

presque partout dans Ω. Donc, en utilisant la condition (7.4.25) nous obtenons $I_n^4 \leq 0$.

• $j = 5$. La quantité I_n^5 tends vers 0 puisque $\nabla T_k(u)\,|\psi(w_n)|$ tends fortement vers $\nabla T_k(u)\,|\psi(0)| = 0$ dans $(L^p(\Omega))^N$, et $\chi_{\{|u|\leq k\}}A(x,T_k(u_n),\nabla T_k(u_n))e^{\theta|T_k(u_n)|}$ est bornée dans $(L^{p'}(\Omega))^N$.

• $j = 6$. La quantité I_n^6 tends vers 0 puisque $\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)$ converge faiblement vers 0 dans $(L^p(\Omega))^N$, et par le théorème de Vitali et $\psi(0) = 0$, $\chi_{\{|u|\le k\}} A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u)) \, |\psi(w_n)| \, e^{\theta|T_k(u_n)|}$ converge fortement vers 0 dans $(L^{p'}(\Omega))^N$.

Par les résultats sur I_n^j, $1 \le j \le 6$, et l'inégalité (7.4.26) nous déduisons que I_n tend vers 0 puisque I_n d'après l'hypothèse (7.4.2) ; c'est à dire

$$\int_{\{|u_n|\le k\}} (A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))) \cdot (\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)) \, dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7.4.29}$$

Par la condition de croissance (7.4.4) et le théorème de Vitali nous avons

$$\begin{aligned} &\chi_{\{|u_n|>k\}} \, (A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))) \cdot (\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)) \\ &\quad = \chi_{\{|u_n|>k\}} \, (A(x, T_k(u_n), 0) - A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))) \cdot \nabla T_k(u) \to 0 \\ &\quad \text{fortement dans } L^1(\Omega) \text{ lorsque } n \to \infty, \end{aligned}$$

Donc, par (7.4.29), nous déduisons que

$$\int_\Omega (A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u_n)) - A(x, T_k(u_n), \nabla T_k(u))) \cdot (\nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u)) \, dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7.4.30}$$

Puisque A satisfait l'hypothèse (HA), alors on peut déduire (7.4.21) en utilisant (7.4.30)d'après un résultat de Browder, voir [5, page 27] ou [4, Lemme 5].

Étape 6 : Passage à la limite. Notons $G_k(s) = s - T_k(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $k > 0$, on a

$$\nabla u_n - \nabla u = \nabla T_k(u_n) - \nabla T_k(u) + \nabla G_k(u_n) - \nabla G_k(u).$$

En utilisant (7.4.20) et (7.4.21) nous obtenons

$$\nabla u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nabla u \quad \text{fortement dans } (L^p(\Omega))^N,$$

c'est à dire

$$u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{fortement dans } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Finalement, il est facile de passer à la limite dans le problème d'approximation (7.4.13) et montrer que u est solution du problème (7.4.1). ■

Bibliographie

[1] Bensoussan A., Boccardo L. and Murat F., *On a nonlinear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire , Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire, 5(4), 347-364, 1988.

[2] Abdellaoui B., *Multiplicity result for quasilinear elliptic problems with general growth in the gradient,* Adv. Nonlinear Stud., 8(2) :289-301, 2008.

[3] Abdellaoui B., Dall'Aglio A., and Peral I., *Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient,* J. Differential Equations, 222(1) :21–62, 2006.

[4] Boccardo L., Murat F. and Puel J.P., *Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta, 152, 183-196, 1988.

[5] Browder F.E., *Existence theorems for nonlinear partial differential equations*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVI, Berkeley, Calif., 1968), 1-60, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.

[6] Dall'Aglio A., Giachetti D., and Segura de León S., *Nonlinear parabolic problems with a very general quadratic gradient term,* Differential Integral Equations, 20(4) :361–396, 2007.

[7] Ferone V. and Murat F., *Nonlinear problems having natural growth in the gradient : an existence result when the source terms are small* Nonlinear Anal., 42(7, Ser. A : Theory Methods) :1309–1326, 2000.

[8] Porretta A., *Nonlinear equations with natural growth terms and measure data,* Proceedings of the 2002 Fez Conference on Partial Differential Equations, 9 , Electron. J. Differ. Equ. Conf., pages 183–202 (electronic), San Marcos, TX, 2002. Southwest Texas State Univ.

[9] Leray J., and Lions J.L., *Quelques résulats de Višik sur les problèmes elliptiques nonlinéaires par les méthodes de Minty-Browder,* Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 97-107.

[10] Serrin, J. *Isolated singularities of solutions of quasi-linear equations*, Acta Math. 113 (1965), 219-240.

Résumé :

Dans ce manuscrit de thèse nous présentons des nouveaux résultats concernant l'existence, la non-existence, la multiplicité et la régularité des solutions positives pour deux problèmes quasilinéaires elliptiques avec conditions de Dirichlet dans un domaine borné. Dans le chapitre 1 d'introduction, nous décrivons les deux problèmes que nous allons étudier et nous donnons les principaux résultats. Le premier, d'inconnue u, comporte un terme de source de gradient à croissance critique. Le second, d'inconnue v, contient un terme source d'ordre 0. Dans le chapitre 2 nous donnons des nouveaux résultats de régularité des solutions renormalisées utiles pour notre étude.

A l'aide d'un changement d'inconnue, nous établissons un lien précis entre les problèmes en u et v. Le chapitre 3 est consacré à montrer ce lien et à donner une première application.

Dans les chapitres 4 et 5 nous traitons de l'existence de solutions, la solution extrémale et sa régularité, l'existence d'une deuxième solution bornée du problème en v. Dans le chapitre 6 nous démontrons un résultat d'existence pour le problème en v avec des données mesures de Radon bornées quelconques. Dans le chapitre 7 nous obtenons des nouveaux résultats pour le problème en u en utilisant la connexion entre ces deux problèmes.

Mots clés :

Problèmes quasilinéaires elliptiques, p-Laplacien, mesures de Radon bornées, p-capacité, topologie étroite, topologie faible *, solution renormalisée, solution atteignable, solution minimale bornée, solution extrémale, régularité, multiplicité, deuxième solution bornée, fonctionnelle d'Euler, solution semi-stable, géométrie de col, suites de Palais-Smale.

Abstract :

In the thesis manuscript we present new results concerning existence, nonexistence, multiplicity and regularity of positive solutions for two elliptic quasilinear problems with Dirichlet data in a bounded domain. In chapter 1 we describe the two problems which we study in the sequel and we give the main results. The first one, of unknown u, involves a gradient term with natural growth. The second one, of unknown v, presents a source term of order 0. In chapter 2 we give new regularity results for renormalized solutions.

Thanks to a change of unknown we establish a precise connection between problems in u and v. Chapter 3 is devoted to show this connection and to give a first application.

In the chapters 4 and 5 we treat existence solutions, extremal solution and its regularity, the existence of a second bounded solution for the problem in v. In chapter 6 we prove a result of existence for the problem in v with general bounded Radon measures data. In chapter 7 we obtain new results for the problem in u by using the connection between these two problems.

Keywords :

Elliptic quasilinear problems, p-Laplacien, bounded Radon measures, p-capacity, narrow topology, weak * topology, renormalized solution, reachable solution, minimal bounded solution, extremal solution, regularity, multiplicity, second bounded solution, Euler function, semi-stable solution, geometry of Mountain Path, Palais-Smale sequences.